

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 15****ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ»****Εργασία 1^η:**

Η τιμή (σε ευρώ) ενός προϊόντος, μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά, δίνεται από τον τύπο:

$$f(t) = \frac{4t^2 + t + 19}{t^2 + \frac{25}{4}}$$

- α) Να βρεθεί η τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.
- β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τιμής του προϊόντος δύο μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά.
- γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα, στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται.
- δ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή του προϊόντος;
- ε) Να αποδειχθεί ότι η τιμή του προϊόντος, μετά από κάποια χρονική στιγμή, συνεχώς μειώνεται, χωρίς όμως να γίνεται μικρότερη από την αρχική τιμή.

Εργασία 2^η:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax^3 + 1}{2x^2}$, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = x$.

- α) Να αποδειχθεί ότι $a = 2$.
- β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.
- γ) Να χαραχθεί η γραφική παράσταση της f .
- δ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ευθεία $y = x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.
- ε) Να αποδειχθεί ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την καμπύλη $y = \ln x$.

**Εργασία 3^η:**

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύει $(f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον άξονα $x'x$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = (f'(x) - f(x)) \cdot e^x$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

δ) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$ και $\int_0^{\frac{3}{4}} f^{-1}(x) dx = \frac{3}{4} \ln 2 - \frac{1}{4}$

Εργασία 4^η:

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f'(x) = \frac{1}{f^2(x) + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδειχθεί ότι $f^3(x) + 3f(x) = 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x}$ και να αποδειχθεί ότι $f\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right) < 1$ για κάθε $x \neq 0$.

γ) Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα.

δ) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $\int_0^a f(x) dx \leq \frac{a^2}{2}$.

ε) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{4}{3}} f(x) dx$.