



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 16

ΕΝΟΤΗΤΑ : « ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ »

Εργασία 1^η:

Εστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \geq 0 \\ \frac{a - e^x}{e^x}, & x < 0 \end{cases}$$

- A) Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $a = 1$.
- B) Για τη παραπάνω τιμή του a , να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι $1 - 1$.
- Γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$.
- Δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

Εργασία 2^η:

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, που είναι γνησία αύξουσα και συνεχής.

Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 1$ τότε:

- A) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x}$.
- B) Να δείξετε ότι $f(1) = 0$.
- Γ) Να βρεθεί ο κ , ώστε η $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x - 1}, & x \neq 1 \\ \kappa, & x = 1 \end{cases}$ να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- Δ) Για $\kappa = 1$, δείξτε ότι η C_g τέμνει την ευθεία $(e): y = 2x$ σ'ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

Εργασία 3^η:

Δίνεται η συνάρτηση $(e^x + 1)f'(x) = e^x + 1 + e^{2x}$, με $f(0) = 1 - \ln 2$.

- A) Να δείξετε ότι $f(x) = x - \ln(e^x + 1) + e^x$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- B) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = 2018$ τέμνει την γραφική παράσταση της f σε ένα ακριβώς σημείο.
- Γ) Να δείξετε ότι η $g(x) = f(x) - e^x$ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντιστροφή της.
- Δ) Να βρείτε το κ αν ισχύει:
 $g(\kappa) - \ln(e^{g(\kappa)} + 1) = \kappa - 1 - \ln(e^{\kappa-1} + 1)$ (1)
- Ε) 1. Να βρείτε το εμβαδό που περικλείεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες $x = 0$, $x = \ln 2$.
2. Να βρείτε το εμβαδό που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $\varphi(x) = e^{g(x)}$, τον $x'x$ και τις $x = 0$, $x = \ln 2$ και στη συνέχεια να συγκρίνετε τα δύο παραπάνω εμβαδά.

**Εργασία 4^η:**

Η συνάρτηση f είναι παραγωγισμή στο $\mathbb{R}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) - f(x) = ne^x$, με $n \in \mathbb{R}_+$.

Η γραφική παρασταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$.

A) Να βρείτε τον τύπο της f .

B) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ) Να δείξετε ότι η μοναδική ρίζα της f βρίσκεται στο διάστημα $(0, +\infty)$ την οποία και να βρείτε.

Δ) Να υπολογίσετε το $n \in \mathbb{R}$ ώστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , το δετικό ημιάξονα των x και τον άξονα $y'y$ να ισούνται με $4e-8$.

Ε) Για το n που βρήκατε να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$.

Εργασία 5^η:

Δίνεται η συνάρτηση f με την $f''(x)$ συνεχή στο $\mathbb{R}$ ώστε:

$$\int_0^x (t^2 + 3) \cdot f''(t) dt = 2 \int_x^0 t \cdot f'(t) dt - \frac{3}{4} \int_0^2 x \cdot t^2 \cdot f(x) dt \quad (1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$f(0) = 0, f'(0) = \frac{1}{3}.$$

A) Να βρείτε τη συνάρτηση f .

B) Αν $E(n)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = n > 0$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του $E(n)$ αν το n αυξάνει με ρυθμό $4 \mu/\text{sec}$ τη χρονική στιγμή που το n είναι ίσο με 1μ .

Γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)$ για την οποία ισχύει:

$$|h(x) - 2x - 3| \leq |f(x)| \quad (2) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

1. Δείξτε ότι η $e: y = 2x + 3$ είναι ασυμπτωτή της C_h όταν $x \rightarrow -\infty$

2. Αν E το εμβαδόν που περικλείεται από την C_h , τη πλάγια ασυμπτωτή της C_h όταν $x \rightarrow -\infty$ και τις ευθείες $x = -3$ και $x = 0$, να δείξετε ότι $E \leq \ln 2$.

