



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 16

ΕΝΟΤΗΤΑ : « ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ »

Εργασία 1^η:

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(5)=6$ και $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2x}{x - 3} = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(3)=6$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(3, f(3))$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x+2$ τέμνει τη C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (3, 5)$.

δ) Αν η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (3, 5)$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

Εργασία 2^η:

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x}{e^x}$ και $g(x) = e^x - \frac{x^3}{3} - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να αποδείξετε ότι: $e^x > 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g .

ε) Να λύσετε την ανίσωση: $g(e^{2x}) < g(4x^2 + 1)$



Εργασία 3^η:

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln x - x$.

α) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Αν $0 < \alpha < \beta < 1$, να δείξετε ότι $\alpha e^\beta < \beta e^\alpha$

γ) Να λυθεί η ανίσωση: $\ln(x^2 + 2) - (x^2 + 2) < \ln(x^2 + e^x + 1) - (x^2 + e^x + 1)$

Εργασία 4^η:

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 1 + e^{-x}, & \text{αν } x < 0 \\ 2 - \ln(x+1), & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = -x + 2$.

δ) Να εξετάσετε αν ορίζεται η f^{-1} και αν ναι να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και ο τύπος της.

ε) Να χαράξετε την γραφική παράσταση της f και να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $y = 0$