

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 18****ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ»****Εργασία 1^η:**

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f , αν υπάρχουν.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = -1$.

Εργασία 2^η:

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (x-4) \cdot \ln x + 3x - 4$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$. Στη συνέχεια, να βρείτε το σύνολο τιμών της και να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$, ακριβώς σε δύο σημεία.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $f\left(\frac{2f(x)+3}{6}\right) = -1$, έχει ακριβώς δύο ρίζες.

γ) Αν x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) οι ρίζες της εξίσωσης του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$x_0 \cdot f'(x_0) - f(x_0) = -\frac{3}{2}$$

δ) Να αποδείξετε ότι:

1) $f(x+1) - f(x) > f'(x)$, για κάθε $x > 0$.

2) $\int_{\rho_1}^{\rho_2} x \cdot f(x+1) dx > \int_{\rho_1}^{\rho_2} (x-1) \cdot f(x) dx$, όπου ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$) οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$

**Εργασία 3^η:**

Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση και g συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση με:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x \cdot f(x) - e^{x_0} \cdot f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{h}, \text{ για κάθε } x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\bullet f(0) = \frac{1}{2} \text{ και}$$

$$\bullet g(x) = \int_0^2 g(u) du + x^4 - \frac{32}{5}.$$

α) Να δείξετε ότι: $-f'(x) = e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x)$

β) Να δείξετε ότι: $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ και ότι: $f(x) + f(-x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να δείξετε ότι $g(x) = x^4$.

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) dx$.

ε) Να βρεθεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{f(x)} \right) \right)$.

στ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της f^{-1} .

ζ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{\frac{1}{\sqrt{e}+1}}^{\frac{1}{\sqrt{e}-1}} f^{-1}(x) dx$.