

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2****ΕΝΟΤΗΤΑ : « ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ »****ΘΕΜΑ 1**

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(ax)}{\sqrt{x}}$, $a > 0$.

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $x - y = 0$, να βρείτε την τιμή του a .

Για $a = 1$:

α. Να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της f .

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών και τις ασύμπτωτες.

γ. Να αποδείξετε ότι: $(\sqrt{k})^{\sqrt{k+1}} > (\sqrt{k+1})^{\sqrt{k}}$ για κάθε θετικό ακέραιο $k \geq 8$.

ΘΕΜΑ 2

Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) - g'(x) = 1$, $f'(x) \neq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν στο όριο $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 2}{f(x) - x - 2}$ εφαρμόσουμε τον κανόνα του ορίου πηλίκου, παρουσιάζεται

απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$.

α. i. Να υπολογίσετε το όριο L .

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στο $+\infty$.

β. Να αποδείξετε ότι η g έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

γ. Να αποδείξετε ότι: $f(x) - g(x) = x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 3

Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $g(0) = 1$ και $f'(x) = g^2(x) \neq 0$, $f^2(x) + g^2(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $g'(x) = -g(x) \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

ii. Η g είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[0, +\infty)$ και έχει ακρότατο το 1.

β. i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

ii. Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0, 0)$.

γ. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου, που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες

$y = x$, $x = 1$, να δείξετε ότι $E = \frac{1}{2} + \ln[g(1)]$.

**ΘΕΜΑ 4**

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x} \cdot (\ln x - 2)$, $x > 0$.

α. Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x > 0$

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$.

γ. Να μελετήσετε τα κοίλα της f και να βρείτε το σημείο της καμπής της.

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \text{ τον άξονα } x'x \text{ και τις ευθείες } x = \frac{1}{e} \text{ και } x = e^2.$$

ΘΕΜΑ 5

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0) = \frac{1}{2}$ και

$$e^x [f(x) + f'(x)] + \eta\mu x = -f'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + e^x}$, $x \in \mathbb{R}$ και ότι ισχύει $f(x) + f(-x) = \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx$. δ. Να αποδείξετε ότι: $0 \leq \int_0^{\pi/2} f(x) dx \leq \frac{\pi}{4}$.

ΘΕΜΑ 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - ax - 1$ όπου $a > 1$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$.

β. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο το οποίο είναι αρνητικό.

γ. Έστω $E(a)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο $(0, f(0))$ και την ευθεία $x = a > 1$.

i. Να αποδείξετε ότι: $E(a) = e^a - \frac{a^2}{2} - a - 1$.

ii. Να βρείτε το $\lim_{a \rightarrow +\infty} E(a)$.