

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 20****ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ»****Εργασία 1^η:**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

γ) Να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα.

δ) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f .

ε) Να χαράξετε την γραφική παράσταση της f .

στ) Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης: $x^x = \frac{a^x}{e}$, με $x, a > 0$.

ζ) Να δείξετε ότι: $\ln x > 1 + \frac{1}{e} - \frac{1}{x}$, για κάθε $x > e$.

θ) Να δείξετε ότι: $x \cdot e^{\frac{1-x}{x}} \geq 1$, για κάθε $x > 0$.

Εργασία 2^η:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{2 \cdot \ln x}{x}$, $x > 0$.

α) Να βρεθεί η μονοτονία της.

β) Να βρεθεί το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην πλάγια ασύμπτωτή της.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Εργασία 3^η:

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln(e^x + 1)$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

δ) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

ε) Να δείξετε ότι: $\ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right)^2 \geq x$

**Εργασία 4^η:**

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x \cdot \ln x, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

β) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

δ) Να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα.

ε) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f .

στ) Να χαράξετε την γραφική παράσταση της f .

ζ) Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης: $x = e^{\frac{a}{x}}$, για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

η) Να αποδείξετε ότι: $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$, $x > 0$.

Εργασία 5^η:

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με:

$$f'(x) \cdot \ln x = \frac{1}{x} \cdot f(x) + \ln(f(x))$$

και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(e, e^e)$.

α) Να δείξετε ότι: $f(x) = e^x \cdot \ln x$.

$$\text{Δίνονται οι συναρτήσεις: } g(x) = \frac{f(x)}{e^x} \text{ και } h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_g , C_h .

γ) Να δείξετε ότι οι C_g , C_h έχουν στα κοινά τους σημεία κοινή εφαπτομένη.