

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 21****ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΝΔΟΣΧΟΛΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ»****Εργασία 1^η**

Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot g(x) - x^2}{\eta\mu x} = 1$

καθώς και η συνάρτηση f με
$$f(x) = \begin{cases} 2^{\ln(1+x)} + x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), & \text{αν } -1 < x < 0 \\ g(0), & \text{αν } x = 0 \\ -x^3 - ax^2 + 2 - a, & \text{αν } x > 0, \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι $g(0) = 1$.

β) Να βρεθεί ο $a \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

γ) Για $a = 1$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$

Εργασία 2^η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

Γ1. Να υπολογίσετε την τιμή του a , ώστε η ευθεία $(\varepsilon): y = 4x - 2$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Στη συνέχεια για $a = 1$

Γ2. α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

β) Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την ανίσωση: $f(x^3 + x) > 10$

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x^2 + 1} \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \right)$

**Εργασία 3^η**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) + x \cdot f'(x) = 2x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$
- $f(1) = 10$

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

Δ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

Δ4. Να αποδείξετε ότι: $f(x) - 10 \leq (x - 1) \cdot f'(x)$, για κάθε $x \in [1, +\infty)$

Εργασία 4^η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 , & \text{αν } x \leq 1 \\ 1 + \frac{\ln x}{x} , & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ αλλά όχι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Δ2. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ3. Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $[1, e\sqrt{e}]$.

Δ4. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in [1, e\sqrt{e}]$ ισχύει: $f(x) - 1 \geq (x - 1) \cdot f'(x)$