

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 22****ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ»****Εργασία 1^η:**

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση g με:

- $g(x) = (x^2 - 2017x)g'(x) + 1$ για κάθε $x \in [\alpha, 2017]$
- $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} [(e^x - 1) \ln x]$
 - i. Να δείξετε ότι $\alpha = 0$.
 - ii. Να δείξετε ότι η g είναι σταθερή για κάθε $x \in [0, 2017]$, με $g(x) = 1$.

Αν g σταθερή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με F μία παράγουσα της στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

- $F(1) + 1 = g(1)$ και
- $f(x) = x(1 + 2F(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- iii. Να δείξετε ότι $f(x) = xe^{x^2-1}$, $x \in \mathbb{R}$
- iv. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- v. Να λύσετε για κάθε $x > 0$ την εξίσωση:

$$3 - e^{x^2-1} = \frac{2}{x}$$

**Εργασία 2^η:**

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, με τη δεύτερη παράγωγο συνεχή.

Αν:

- $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\eta\mu(2x))}{\ln(\eta\mu(3x))}$
- $\beta = \int_0^{e-1} \ln(t+1) dt$
- $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f''(x)e^{-x} = [f'(x)]^2, x \in \mathbb{R}$
- $f'(1) = -\alpha(e+1)^{-1}$ και $2f'(0) + \beta = 0$

i. Να δείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$.

ii. Να υπολογίσετε το : $\int_0^1 [f''(x)]^2 e^{-x} dx$

iii. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
 $f(x+3) > 2f(x+2) - f(x+1)$

iv. Να δείξετε ότι έχει μοναδική λύση, η οποία ανήκει στο διάστημα $(0,1)$ η εξίσωση:

$$\frac{\int_0^1 (f(x) - f(1)) dx}{x} - \frac{\int_0^1 (f(x) - f(0)) dx}{x-1} = 0$$

v. α. Αν $f(0) = \ln 2$, να δείξετε ότι :

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x}), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

β. Υλικό σημείο $M(x(t), y(t))$ κινείται στην γραφική παράσταση της f και απομακρύνεται με ρυθμό 2m/s από τον άξονα των yy' . Τη χρονική στιγμή t_0 που η τεταγμένη του M είναι ίση με $\ln 2$, βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.