



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 23

ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ»

Εργασία 1^η:

Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x^2 \cdot f(x) \leq \eta\mu^3 x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^3 x}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
- β. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- γ. Να βρείτε της ασύμπτωτες της C_f και να βρείτε τα σημεία τομής τους με τη C_f .
- δ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Εργασία 2^η:

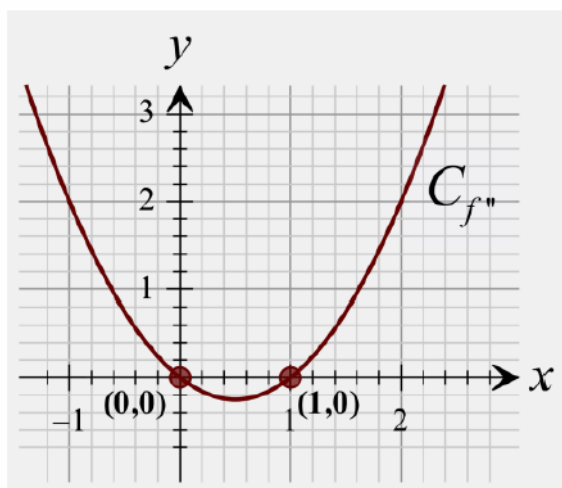
Έστω η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x) - e^{2x^2} = 2e^x(e^{x^2} - f(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$.

- α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- γ. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \kappa^2 - 5\kappa + 7$ για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$.
- δ. Ένα σημείο $M(x, f(x))$, $x > 0$ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 1 μον / sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OMB , όπου $O(0,0)$ και $B(1,0)$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το $A(1, f(1))$.

Εργασία 3^η:

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της f'' φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Ακόμη δίνεται ότι:

- η ευθεία $\varepsilon_1: y=0$ εφάπτεται της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_1=0$,
- η ευθεία $\varepsilon_2: y=-8x+5$ είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_2=1$,
- η ευθεία $\varepsilon_3: y=-27$ εφάπτεται της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_3=3$

α. Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

β. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

γ. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 8x - 5}{(x-1)^2}$

δ. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ε. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

στ. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν ισχύει $f(\alpha + \beta) + 2f(5\alpha - \beta) + 81 = 0$.

ζ. Ναδειχθεί ότι $f\left(\frac{31}{10}\right)f\left(\frac{29}{10}\right) + 27\left(f\left(\frac{31}{10}\right) + f\left(\frac{29}{10}\right)\right) > -729$.