

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3****ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ»**

ΘΕΜΑ 1° : Έστω $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

- α) Να δείξετε ότι f συνεχής.
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της.
γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f καθώς και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 \ln x = a, a \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 2° :

- A. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ τέτοια ώστε $f(a) - f(\beta) = a^3 - \beta^3$.
Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 3\xi^2$.
B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$, με πεδίο ορισμού το $A = (-1, 10]$.
α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f .
β) Ποιο είναι το σύνολο τιμών της f ;
γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $2x^3 - 9x^2 + 12x + 1 = 0, x \in A$.

Γ. Να βρείτε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(4x) + ax + \beta x^2}{x^2} = 2$.

ΘΕΜΑ 3° :

- A. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln x - x$.
α) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
β) Αν $0 < a < b < 1$, να δείξετε ότι $a e^b < b e^a$.
γ) Να λυθεί η ανίσωση $\ln(x^2 + 2) - x^2 - 2 < \ln(x^2 + e^x + 1) - (x^2 + e^x + 1)$
B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + \beta x^2 - 1$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα a, β ώστε το σημείο $M(1, 3)$ να είναι σημείο καμπής της C_f .
Γ. Να βρείτε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $\varepsilon : y = 3x + 7$ να είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{ax^2 + \beta x + \eta\mu x}{x - 2}$ στο $+\infty$.

**ΘΕΜΑ 4° :**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(\alpha) = \alpha$ και $f(\beta) = \beta$, όπου $0 < \alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία της C_f η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$

β) υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0) = \alpha + \beta - x_0$.

γ) υπάρχουν $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$.

δ) αν υπάρχει η f'' στο $[\alpha, \beta]$ και είναι συνεχής, ώστε $\int_{\alpha}^{\beta} x f''(x) dx = 0$ τότε η εξίσωση:

$$x f''(x) + f'(x) = 1 \text{ έχει λύση στο } (\alpha, \beta).$$

ΘΕΜΑ 5° :

Έστω συνάρτηση f με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει: $f'(x) + f^2(x) = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε :

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_x^y \frac{du}{4-u^2}$, με $x, y \in (-2, 2)$

β) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{2 \cdot (e^{4x} - 1)}{e^{4x} + 1}$

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, να βρείτε το σημείο καμπής της και να δείξετε ότι $|f(x)| \leq 4|x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία με εξίσωση $y = 4x$ και την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$