

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 4****ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ»****Εργασία 1^η:**

Έστω οι συναρτήσεις $g(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$, $x \geq 0$ και $f(x) = e^{x^2}$, $x \geq 0$

- Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία.
- Να δείξετε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει $g(x) \geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;
- Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης.
- Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των f στο $[0,1]$ και της αντίστροφης της στο $f([0,1])$.
- Να δείξετε ότι $\int_0^1 e^{x^2} dx + \int_1^e \sqrt{\ln x} dx = e$

Εργασία 2^η:

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \eta \mu x}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

- Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.
- Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και να δείξετε ότι έχει άπειρα κοινά σημεία με την C_f .
- Αν $g(x) = e^x \cdot f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ τότε:
 - Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = 0, x = \pi$.
 - Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx$.

**Εργασία 3^η:**

A. Έστω η συνάρτηση $h(x) = \ln x + x$, $x \in (0, +\infty)$.

i. Να αποδείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^{1+e} h^{-1}(x) dx$.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + x = 0$ έχει ακριβώς μια λύση, έστω $\rho \in (0, +\infty)$.

iii. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x}{h(x)}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{h^2(x)}$.

B. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - x + \frac{x^2}{2}$, $x > 0$.

i. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $\rho \in (0, +\infty)$ του (A.ii) ερωτήματος.

ii. Να εξετάσετε αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $(1, f(1))$ εφάπτεται και στη γραφική της g

$$\text{όπου } g(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 - \frac{11}{6}.$$

iii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \rho} \frac{f'(x)}{x - \rho}$, όπου $\rho \in (0, +\infty)$ του (A.ii) ερωτήματος.

Εργασία 4^η:

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και η ευθεία που ενώνει τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(b, f(b))$, $0 < a < b$ της γραφικής παράστασης C της f να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

A. Να δείχτεί ότι:

i. Ισχύει $\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}$

ii. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b) με $f''(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, τότε υπάρχει εφαπτομένη της C_f η οποία περνά από την αρχή των αξόνων και η C_f να εφάπτεται μια μόνο φορά σε αυτήν.

B. Αν η f έχει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, 0]$ να δείχτεί ότι:

i. αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{x} = L$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x-1) - f(x)}{x} = -L$

ii. η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x < 0$ με $f(0) = 0$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Γ. Αν το σημείο $B(b, f(b))$ ανήκει στην εφαπτομένη της C_f στο $A(a, f(a))$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)(\xi - a) = f(\xi) - f(a)$.