

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 5****ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ»****Εργασία 1^η :**

Δίνεται η συνάρτηση $f: \Delta = (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{1-x \cdot \ln x}{x \cdot e^x}$.

α) Να βρείτε την f' .

β) Να λυθεί η ανίσωση: $f(x) > 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $\rho \in (1, 2)$, με τιμή $f(\rho) = -\frac{\rho+1}{\rho \cdot e^\rho}$.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f .

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 3$.

Εργασία 2^η :

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+|x|}$ και $g(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$.

α) Να δείξετε ότι η g είναι άρτια και ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f και να κάνετε την γραφική της παράσταση.

δ) Έστω $\Omega(\alpha)$ το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = -\alpha$, με $\alpha > 0$.

1) Να δείξετε ότι: $\Omega(\alpha) = \begin{cases} 2\alpha, & \text{αν } 0 < \alpha \leq 1 \\ 2 \cdot (1 + \ln \alpha), & \text{αν } \alpha > 1 \end{cases}$

2) Υποθέτουμε ότι το σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ απομακρύνεται από τον άξονα των τεταγμένων με ρυθμό $2e \text{ cm/sec}$. Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν $\Omega(\alpha)$, την στιγμή που αυτό είναι ίσο με 4.

**Εργασία 3^η :**

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = (x-2) \cdot e^{-x}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $A(a, \beta)$ αν είναι γνωστό ότι η εφαπτομένη της C_f στο A διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι η μοναδική συνάρτηση για την οποία ισχύει: $f'(x) + f(x) = e^{-x}$ και $f(0) = -2$.

δ) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2018 + f^2(x)}{2019 + f^2(x)}$

Εργασία 4^η :

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = x - 1 - x \cdot \ln x$ και $g(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(x) \leq 0$ για κάθε $x > 0$.

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

γ) Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

δ) Να δείξετε ότι: $(1 + 2\sqrt{2})^{\sqrt{3}} > (1 + 2\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$

Εργασία 5^η :

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . β) Να λύσετε την εξίσωση: $f\left(\frac{x}{2}\right) = x$, $x \in (-1, 1)$.

γ) Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $g(x) = f\left(\frac{g(x)}{2}\right)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η g είναι σταθερή και να βρεθεί η τιμή της.

δ) Να δείξετε ότι: $f'(x) = 1 - f^2(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) Να βρείτε τις τιμές των A και B όταν: $A = \int_0^1 f^2(x) dx$, $B = \int_0^2 x \cdot [1 - f^2(x)] dx$.