

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 6****ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ»****Εργασία 1^η:**

1. Να δείξετε ότι ισχύει $\left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
2. Αν η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{x}{x^2+1}$ και για κάποιο $x_0 \in [0, +\infty)$ ισχύει :
 $f(x_0) = \frac{1}{2}x_0$ και $f(-x_0) = -\frac{1}{2}x_0$ να δείξετε ότι :
 - i. για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $|f(\beta) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|\beta - \alpha|$
 - ii. $f(0) = 0$
 - iii. η εξίσωση $f(x) = x$ έχει ακριβώς μια ρίζα
 - iv. η εξίσωση $\eta \mu \frac{x}{2} = x$ έχει μοναδική λύση την οποία και να υπολογίσετε

Εργασία 2^η:

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $|f(x) - 2^x + 2^y - f(y)| \leq |x - y|^{2017}$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $g'(\alpha) - g'(\beta) = -2\alpha + 2\beta$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $g(0) = 1$, $g(1) = 2$

1. Να δείξετε $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$
2. Να δείξετε ότι $g(x) = -x^2 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$
3. i. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν δύο ακριβώς κοινά σημεία τα οποία να βρείτε
ii. Να δείξετε ότι σε κανένα από τα δυο παραπάνω σημεία οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν δέχονται κοινή εφαπτομένη
4. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε : $f(\xi)g'(\xi+1) = -f'(\xi)g(\xi+1)$

Εργασία 3^η:

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

1. $f(e) = e^2$ 2. $f'(x) \cdot x - 2f(x) = x^2$, για κάθε $x > 0$

A. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι : $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

B. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα και τα σημεία καμπής

Γ. Να σχεδιάσετε μια «πρόχειρη» γραφική παράσταση της f

Δ. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης : $x = e^{\frac{a}{x^2}}$

**Εργασία 4^η:**

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν : $f(e) = 1 - \frac{1}{e}$, $f(x) + \frac{1}{x} \neq 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-2h) - 2f(x) + f(x+2h)}{h} = \frac{\left| f(x) + \frac{1}{x} \right|}{x \cdot \ln x} + \frac{1}{x^2} , \text{ για κάθε } x > 1$$

1. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 1$

2. Να δείξετε ότι $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} < f(x+1) - f(x) < \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x > 1$

3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^{x^2+2x} \left(\ln \frac{x+1}{x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \right]$

4. Να δείξετε ότι η εξίσωση : $\frac{f(x) - f(2) - \frac{4}{9}}{x-3} + \frac{f(x) - f(3) + \frac{3}{4}}{x-2} = 2017$
έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$

Εργασία 5^η:

Έστω συνάρτηση $f: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, δις παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν :

1. $f''(x) = e^{2f(x)} + e^{f(x)}$, για κάθε $x \in (-\infty, 0]$

2. $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0]$

3. η ευθεία $y = 2x$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $O(0, f(0))$

A. Να δείξετε ότι $e^{-f(x)} f'(x) = 1 + e^{-f(x)}$ και στη συνέχεια ότι : $f(x) = -\ln(2e^{-x} - 1)$, $x \leq 0$

B. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται, να βρείτε την f^{-1} και στη συνέχεια να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της C_f δεν είναι πάνω από την ευθεία $y = x$, για κάθε $x \leq 0$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = 1 - \sin x$ για $x \leq 0$