

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 7****ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ»****Εργασία 1^η:**

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει:

$$xf(x) = 4f(x) + 3x^2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι: $f(0) = 0$

β) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να δείξετε ότι: $f(x) \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Εργασία 2^η:

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, με $1 < f(0) < 2$, ώστε να ισχύει:

$$f'(x) = f^2(x) - 4 \cdot f(x) + 5 \quad \text{για κάθε } x \in [0,1]$$

A. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

B. Να δείξετε ότι $f(1) > 2$

Γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ ώστε $f(x_0) = 2$

Δ. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Ε. Αν δίνεται $\frac{f(1)}{f(0)} = e^5$ και $\int_0^1 f(x) dx = 4$, να υπολογίσετε το $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx$

**Εργασία 3^η:**

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \geq e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) \cdot f(-x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε το $f(0)$ και να αποδείξετε ότι: $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

β. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση: $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g

iii. Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $\ln \alpha + \ln \beta + \ln \gamma = 1$, να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot e^{\beta+\gamma} + \beta \cdot e^{\alpha+\gamma} + \gamma \cdot e^{\alpha+\beta} \geq 3e^3$.

Εργασία 4^η:

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $\sin^2(f(x)) + 4f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f^{-1}(x) = \eta \mu x$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$