

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 8****ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ»****ΕΡΓΑΣΙΑ 1^η:**

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$
2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 2)) = \frac{e^2}{5}$ έχει στο σύνολο $\mathbb{R}$ μία ακριβώς ρίζα.
3. Να αποδείξετε ότι: $\int_2^4 f(x) dx < \frac{2 \cdot e^4}{17}$, για κάθε $x > 0$.
4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_1^e f(\ln x) \cdot \frac{\ln x}{x^2} dx$.

ΕΡΓΑΣΙΑ 2^η:

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) \cdot [e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $f(0) = 0$

1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$.
2. α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στην C_f , την ευθεία $y = x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.



3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(e^{|f(x)|} - 1 \right) \cdot \ln |f(x)| \right]$

4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{1 - 3 \cdot \int_0^1 f(u^2) du}{x - 3} + \frac{2017 \cdot \int_2^3 f^2(u) du}{x - 2} = 0$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2, 3)$.

ΕΡΓΑΣΙΑ 3^η:

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^{x-1} - \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h \circ g$ με $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, όπου $h(x) = f(x^2 + 1) + f(x - 2)$.

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = 1$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες x_1, x_2 .

4. Αν για τις ρίζες x_1, x_2 του προηγούμενου ερωτήματος ισχύει $x_1 < x_2$ τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_1, 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$