

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 9****ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ»****Εργασία 1^η**

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) = \frac{16}{3f^2(x) + f^2(a) + 1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $a > 0$
- η ευθεία $(\varepsilon): 2x - y + 1 = 0$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

1. Να δείξετε ότι $f(a) = 2$

2. Να βρείτε τον τύπο της f και στην συνέχεια να δείξετε ότι $a = \frac{3}{4}$.

3. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

4. Να δείξετε ότι $f(-3) = -3$ και ότι η συνάρτηση :

$$g(x) = \begin{cases} f(x-5), & \text{αν } x \leq 2 \\ f\left(-\frac{6}{x}\right) - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4}, & \text{αν } x > 2 \end{cases}, \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x = 2.$$

Εργασία 2^η

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $A(2,1) \in C_f$

1. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x^2+1) - 1}{x^2 - 1} = 2 \cdot f'(2)$.

2. Αν επιπλέον για την f ισχύει $f^2(x) - 8 \cdot f(x) = x^2 - 11$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

3. Αν $f(x) = 4 - \sqrt{x^2 + 5}$, $x \in \mathbb{R}$ και $M(a, f(a))$ $a > 0$, σημείο της C_f όπου η τετμημένη του απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με ταχύτητα 3m/s , τότε:
α) να δείξετε ότι το σημείο A της C_f απέχει την μικρότερη απόσταση από το σημείο $B(4,4)$

β) να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $ΟΓΜ$ τη χρονική στιγμή t_0 όπου $a(t_0) = 2\sqrt{11} \text{ s}$, με Γ να είναι το σημείο όπου η C_f τέμνει τον άξονα Ox .

γ) Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \left(\frac{4 + \sqrt{x^2 + 5}}{11 - x^2} \right) \right)$

**Εργασία 3^η**

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) + x = g(x) \cdot (x^2 + 1), \text{ για κάθε } x > 0.$$

Αν G είναι μια παράγουσα της g για την οποία, ισχύει: $G(x) - G\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$

για κάθε $x > 0$ τότε:

1. Να δείξετε ότι: $f(x) = \ln x$, $x > 0$

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x + x}{x^2 + 1} dx$.

3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $t > 0$ ισχύει: $1 - e^{-f(t)} \leq f(t) \leq e^{f(t)} - 1$.

5. Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \int_x^{x^3} \frac{1}{f(t)} dt$ και β) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \int_x^{x^2} \frac{f(t)}{t-1} dt$

Εργασία 4^η

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

2. Για τις διάφορες τιμές του $a \in (0, +\infty)$, να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης: $x = \ln x + \ln a$, $x > 0$.

3. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f(e^{x-1}) = 2e$, $x > 0$.

4. Έστω $\alpha < \beta < e < \gamma < \delta$, να δείξετε ότι: $\frac{\beta}{\ln \beta} + \frac{\gamma}{\ln \gamma} < \frac{\alpha}{\ln \alpha} + \frac{\delta}{\ln \delta}$