



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 3

ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ»

Θέμα Α

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

- A1.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .
- A2.** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- A3.** Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.
- A4.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
- A5.** Να σχεδιάσετε «πρόχειρα την C_f ».
- A6.** Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης: $\frac{x^3}{x^4 - 1} = \frac{\alpha}{x^2 + 1}$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

Θέμα Β

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f^3(x) + f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 8x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- B1.** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
- B2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
- B3.** Να λύσετε την ανίσωση: $f(2e^{x-1}) - f(3 - x^3) < 0$.
- B4.** Να δείξετε ότι:
- α)** $f^3(x) < f(x)$, για κάθε $x < 0$ και $f^3(x) > f(x)$, για κάθε $x > 1$.
- β)** Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Θέμα Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(x+1) \cdot f(x) + 6x^2}{x-1} \right] = 3$ και $f'(x) \cdot x + \alpha \cdot f(x) = 2 \cdot x \cdot \ln x$, για κάθε $x > 0$.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι: $\alpha = 1$



Γ2. Να δείξετε ότι : $f(x) = x \cdot (\ln^2 x - 3)$, για κάθε $x > 0$.

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ4. Να δείξετε ότι η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα $y'y$ και να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

Γ5. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να δικαιολογήσετε γιατί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(e^{-1}, f(e^{-1}))$ «διαπερνά» την C_f .

Γ6. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

Γ7. Να αποδείξετε ότι: $\int_{e^{-3}}^{e^{-1}} f(x) dx < \frac{2 \cdot (1 - e^2)}{e^6}$.

Θέμα Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x + e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Δ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , $C_{f^{-1}}$ και την ευθεία $x = e$.

Δ4. Να βρείτε την συνάρτηση g για την οποία ισχύει: $e^{g(x)} + g(x) = x + \ln x$, για κάθε $x > 0$.

Δ5. Να αποδείξετε ότι : $\frac{1}{g(x+1)} < G(x+1) - G(x) < \frac{1}{g(x)}$, για κάθε $x > 1$,

όπου $G(x)$ μια αρχική συνάρτηση της $\frac{1}{g(x)}$.

Δ6. Να αποδείξετε ότι: $2 - \frac{e}{\pi} < g(\pi) < \frac{\pi}{e}$