



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 4

ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ»

Θέμα Α

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

- A1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- A2.** Να συγκρίνετε τις τιμές $f(e)$ και $f(3)$.
- A3.** Να λύσετε την ανίσωση: $f(3 + x^2) > f(3 + 2x^2)$.
- A4.** Να αποδείξετε ότι: $f(x) \leq 3$, για κάθε $x \geq 1$.
- A5.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(-\infty, 3]$.
- A6.** Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής (αν υπάρχουν) και να σχεδιάσετε «πρόχειρα» την C_f .

Θέμα Β

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση: $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) = 2 \cdot e^{-2x-f(x)} - e^{-x-f(x)}$, για κάθε $x > 0$ με $f(\ln 2) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$.

- B1.** Να δείξετε ότι: $f(x) = \ln(e^{-x} - e^{-2x})$.
- B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- B3.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- B4.** Να λύσετε την ανίσωση: $f(3x^2 + 1) - f(x^2 + 3) > 0$.
- B5.** Να αποδείξετε ότι: $f(x+1) - f'(x) < f(x) < f(x+1) - f'(x+1)$, για κάθε $x > 0$

**Θέμα Γ**

Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση: $f(x) = \frac{2x}{1+x^2} + \int_0^1 (1+t^2) \cdot f(t) dt$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να δείξετε ότι: $f(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 3$

Γ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Γ4. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η συνάρτηση g με $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι ίση με την συνάρτηση f και πότε;

Γ5. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{2x}{1+x^2} + 2 \cdot \sin(2\pi x) = 3$, με $x \in \mathbb{R}$

Θέμα Δ

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και με συνεχή δεύτερη παράγωγο με $\int_1^3 \ln x \cdot f(t) dt \leq 10(x-1)$, για κάθε $x > 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\int_1^3 f(x) dx = 10$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = 5$.

Δ3. Έστω ότι η f αντιστρέφεται και η f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Αν ισχύει: $\int_{f(0)}^5 f^{-1}(x) dx = \int_0^\xi f(x) dx$, όπου ξ ο αριθμός του προηγούμενου

ερωτήματος, να αποδείξετε ότι: $5 < 2 \cdot \int_0^\xi f(x) dx < 15$.

Δ4. Αν επιπλέον ισχύει ότι $\int_0^1 x \cdot f''(x) dx = 0$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει

$\rho \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε το σημείο $A(\rho, f(\rho))$ να είναι πιθανό σημείο καμπής της C_f .