



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 5

ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ»

Θέμα Α

Δίνεται η συνάρτηση $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $h(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{|x-1| - x + 1}$,
όπου A το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h .

- A1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h .
- A2.** Να αποδείξετε ότι: $h(x) = -\frac{x+1}{2x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της h στο σημείο που η αυτή C_h τέμνει τον άξονα $x'x$.
- A3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, αν υπάρχουν, την κυρτότητα και τα σημεία καμψής της C_h , αν υπάρχουν.
- A4.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της h , αν υπάρχουν.
- A5.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται της γραφικής παράστασης της h , του άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$.

Θέμα Β

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $K(1, f(1))$ διέρχεται από το σημείο $\Lambda(e, 2e)$.

- B1.** Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.
- B2.** Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha \leq 1$, σημείο της C_f και (ε) η εφαπτομένη της C_f στο A .
- α)** Να βρείτε το σημείο A για το οποίο η εφαπτομένη (ε) σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με το μέγιστο εμβαδό.
- β)** Έστω σημείο $B(-1, f(-1))$ της C_f και M το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα $y'y$. Αν η τετμημένη του A μεταβάλλεται με ρυθμό e μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του M κατά την χρονική στιγμή κατά την οποία το A διέρχεται από το B .



B3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της C_f για το οποίο η C_f έχει ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

B4. Έστω η συνάρτηση g με $g(x) = f(x) \cdot x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(\alpha) \cdot x^3 - x + 1}{x^2 + 1}, \text{ για τις διάφορες τιμές του } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει: $f(x) \cdot f''(x) = 2(x^2 + x + 1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Γ2. Αν επιπλέον ισχύει $f(0) = 1$, τότε:

A) να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$,

B) να λύσετε την ανίσωση: $f(\ln x) - f(\ln x - 1) > f(1 - x) - f(-x)$,

Γ) να αποδείξετε ότι: $f(2018) - f(-2018) > f(2017) - f(-2017)$

Γ3. Αν επιπλέον ισχύει $f'(0) = 1$, $f(1) = f'(1)$ και $\int_0^1 (f'(x) - 1)^2 dx = \frac{4}{3}$

A) να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$,

B) να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3x$

Θέμα Δ

Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = \frac{e^x}{3f^2(x) + 2f(x) + 1}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f^3(x) + f^2(x) + f(x) = e^x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 1$ και

$$\int_0^{x_0} e^x f(x) dx = \frac{23}{12}.$$

Δ4. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{\frac{1}{f(x)} - 3} \eta \mu t^2 dt$.