



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 7

ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ»

Θέμα Α

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x + \alpha, & x \leq 1 \\ (1 - e^{-x+1}) \cdot \ln(x-1), & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

A1. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1 - e^{-x+1}}{x-1} \right)$

A2. Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο $[1, 2]$.

A3. Για $\alpha = -1$, να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει ένας τουλάχιστον πραγματικός αριθμός $\xi \in (1, 2)$ τέτοιος ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$

β) υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε : $e^{-x_0}(1 - x_0 \cdot \ln x_0) = 1$

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f'(x) - g'(x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = g(1)$.

B1. Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο λύσεις ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < 1 < \rho_2$.

1. Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) ,

β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $g'(\xi) = -2$.

2. Αν $g''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η C_g στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

β) η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $x_0 = \xi$ του ερωτήματος 1-β)



B2. Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση: $y = 3x - 7$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

1. Να βρείτε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(x)}{x} \right) \quad \text{και} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(x) + 3x + \eta\mu(2x)}{x \cdot f(x) - 3x^2 + 2019} \right)$$

2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση: $y = x - 5$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στα $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$. Η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο της

$M(1, f(1))$ έχει εξίσωση: $y = 2x$ και ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) - f(2)}{\sqrt{x+2} - 2} \right) = 4$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(1) = 2$ και $f'(1) = 2$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f'(2) = 1$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η $f \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο 1 και να δείξετε ότι $(f \circ f)'(1) = 2$.

Γ4. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ και η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της $f \circ f$ στο $x_0 = 1$ διέρχεται από το σημείο $A(2, 3)$, τότε :

α) να αποδείξετε ότι: $f(2) = 1$,

β) να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi},$$

γ) αν F αρχική της f με $F(2) = 0$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} \cdot f'(x) - F(x) \right) dx$$

καλή ενασχόληση !!!