

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ****ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ»****Εργασία 1<sup>η</sup>** Να βρεθούν τα όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2x^2 + x - 5)$  (Απ.  $+\infty$ )

ii.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + x^2 - 3x + 2)$  (Απ.  $-\infty$ )

iii.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5 + 3x^2 - 5x + 10)$  (Απ.  $+\infty$ )

**Εργασία 2<sup>η</sup>** Να βρεθούν τα όρια :

i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x + 5}$  (Απ. 3)

ii.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 3x^2 + x - 3}{x^6 + x^4 + x^2 + 1}$  (Απ. 0)

iii.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + x^2 + 1}{-2x^3 + x - 1}$  (Απ.  $+\infty$ )

iv.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^6 + x^5 + 3x + 2}{x^4 - 5x + 6}$  (Απ.  $-\infty$ )

v.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{2x + 1}{x^3 + 1} \right)$  (Απ. 0)

vi.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} - x + 1 \right)$  (Απ. 3)

**Εργασία 3<sup>η</sup>** Να βρεθούν τα όρια :

i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x)$  (Απ.  $+\infty$ )

ii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 2} - 3x)$  (Απ.  $-\infty$ )

iii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 5} + x + 5)$  (Απ.  $+\infty$ )

iv.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x + 7)$  (Απ.  $+\infty$ )

v.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 7} - x + 2)$  (Απ. 3)

vi.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 6x + 10} - \sqrt{x^2 + 2x + 3})$  (Απ. 2)

**Εργασία 4<sup>η</sup>** Να βρεθούν τα όρια :

i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 7} + x + 1}{x + 2}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 7} + \sqrt{x^2 + x + 7}}{x + 3}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x + 3} + 3x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + 4x + 3}$

iv.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + 5x}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 2x}$

**Εργασία 5<sup>η</sup>** Η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  και για κάθε  $x > 0$  ισχύει :

$$1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3} \geq f(x) + x \geq \sqrt{x^2 + 4x + 6}$$

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 

(Απ. 2)

**Εργασία 6<sup>η</sup>** Να βρεθούν τα όρια :

i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + \sqrt{9x^2 + 3x + 7} - 5x)$

ii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 3x} - 2\sqrt{x^2 + 1} - x)$

iii.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 5} + \sqrt{9x^2 + x + 1} - \sqrt{16x^2 + 1})$

iv.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 5} + \sqrt{4x^2 - x} - \sqrt{9x^2 + 1})$

**Εργασία 7<sup>η</sup>** Να βρεθούν τα όρια :

i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 5x + 13| - 7x^2}{|x^3 - 3x^2 + 5| - x^3}$  (Απ. 2)

ii.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^4 + 6x^3 - 5x + 6| - x^4}{|4x^3 + 2x^2 - 3x| + x^3}$  (Απ. - 2)

**Εργασία 8<sup>η</sup>** Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = \frac{|2x^3 + 3x^2 - 3x + 5| - |x^2 - 7x - 13|}{|x^3 + x - 5| + |7 - x|}$ Να βρεθούν τα όρια : i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (Απ. 2)ii.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  (Απ. 2)**Εργασία 9<sup>η</sup>** Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = \frac{|x - 1| - |x - 2|}{x - 3}$ Να βρεθούν τα όρια : i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (Απ. 0)ii.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  (Απ. 0)**Εργασία 10<sup>η</sup>** Να βρεθούν τα όρια :

i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((a-1)x^3 + x^2 + 1)$

ii.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} ((a^2 - 4)x^4 + \beta x^3 + x + 2)$

iii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a+1)x^3 + x + 3}{(a-2)x^2 + x + 1}$

iv.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(a-2)x^2 + x - 3}{(a+2)x^3 + ax^2 + x + 5}$

v.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 + 1}{x + 3} - ax + 2 \right)$

vi.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 5} + ax - 3)$

vii.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 3} + ax + 2)$

**Εργασία 11<sup>η</sup>** Αν  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} + ax + \beta$ , να βρεθούν οι  $\alpha, \beta$  ώστε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 11$  (Απ.  $\alpha = -1, \beta = 10$ )**Εργασία 12<sup>η</sup>** Αν  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{9x^2 + x} - ax - \beta$ , να βρεθούν οι  $\alpha, \beta$  ώστε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{5}{6}$ **Εργασία 13<sup>η</sup>** Αν  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3} - \lambda x$ , να βρεθεί το  $\lambda$ , ώστε το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  να είναι

πραγματικός αριθμός.



**Εργασία 14<sup>η</sup>** Να υπολογιστεί το παρακάτω όριο για τις διάφορες τιμές του  $\lambda$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda^2 - 2)x^3 + 4\lambda x - 1}{\lambda x^2 - 3x + 4}.$$

**Εργασία 15<sup>η</sup>** Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = \frac{(\lambda^2 + \lambda - 2)x^2 + (\lambda - 1)x + 2}{(\lambda + 5)x + 7}$

Να υπολογιστεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , για τις διάφορες τιμές του  $\lambda$

### ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm \infty$ ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΟΡΟΥΣ

• Τα όρια  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \eta\mu x$  και  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sigma\upsilon\nu x$  δεν υπάρχουν. Αν σε κάποιο όριο παρουσιάζονται οι όροι  $\eta\mu x$  και  $\sigma\upsilon\nu x$ , τότε διαιρούμε τους όρους αυτούς με κάποια θετική δύναμη του  $x$ , ώστε χρησιμοποιώντας το κριτήριο παρεμβολής να τους μηδενίσουμε.

• **Ισχύουν :**  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 1$

• Αν έχω όριο όπου  $x \rightarrow \pm\infty$ , που περιέχει  $\eta\mu x$  ή  $\sigma\upsilon\nu x$ , τότε διαιρώ κάθε όρο αριθμητή και παρανομαστή με τη μεγατοβάθμια δύναμη του  $x$ . Αν χρειαστεί κάνω διαχωρισμό του κλάσματος

**Εργασία 16<sup>η</sup>** Να βρεθούν τα όρια :

i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \eta\mu x}{x + 2}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + \eta\mu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x}{3x + \sigma\upsilon\nu x}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \sigma\upsilon\nu x + x^2 \eta\mu x + 2}{x^4 + \eta\mu^4 x + x}$

**Εργασία 17<sup>η</sup>** Να βρεθούν τα όρια :

i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x^2}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^3}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^3 \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

iv.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} - x \right)$

v.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x + 3}$

vi.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \eta\mu x}{x}$

**Εργασία 18<sup>η</sup>** Να βρεθούν τα όρια :

i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - \eta\mu x}{x^2 + \sigma\upsilon\nu x}$

(Απ. 2)

ii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 5\eta\mu x}{2x - 7\sigma\upsilon\nu x}$

(Απ. 3)

iii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \eta\mu x}{x^2 + 1}$

(Απ. 0)

iv.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \eta\mu x}{x^2 - 3x + 2}$

v.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - \eta\mu x}{x + \sigma\upsilon\nu x}$

(Απ. 3)

vi.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2\eta\mu x}{4x + 1}$

vii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{3 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}$

viii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 5} \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

ix.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 - x + 2014}{x + 1} \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

x.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{5 + \eta\mu x}$

xi.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{2x + 3}$

xii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$



**«ΟΡΙΟ ΣΤΟ  $\pm \infty$  ΚΑΙ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ»**

**Εργασία 18<sup>η</sup>** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$3x^5 - 2x^2 \leq (x^5 + 2x + 1)f(x) \leq 3x^5 + 3x^2 + 5$$

Να βρεθούν τα όρια: **α)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , **β)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  και **γ)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

**Εργασία 19<sup>η</sup>** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία για κάθε  $x > 0$  ισχύει:

$$|(x^3 + 3x - 1)f(x) - 2x^2| \leq x$$

Να βρεθούν τα όρια: **α)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , **β)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  και **γ)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \eta\mu x$

**Εργασία 20<sup>η</sup>** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$6x^3 - 5x^2 + 2 \leq f(x) \leq 6x^3 + 2x^2 + 7$$

Να βρεθούν τα όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (Απ.  $+\infty$ )      ii.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^2 + 3x - 5}$  (Απ.  $-\infty$ )

iii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^4 - 2x^3 + x}$  (Απ. 0)      iv.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{2x^3 - x + 13}$  (Απ. 3)

**Εργασία 21<sup>η</sup>** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$\frac{4x^2 + x - 2}{1 - x^2} \leq f^2(x) - 4f(x) \leq \frac{4x^3 + x - 2}{1 - x^3}$$

Να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (Απ. 2).

**Εργασία 22<sup>η</sup>** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) - 6x^2 - 3x + 5}{x^2 - 5x + 4} = 4$

Να βρεθούν τα όρια: **α)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  (Απ.  $+\infty$ ) , **β)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^2}$  (Απ. 10)

**Εργασία 23<sup>η</sup>** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - \sqrt{x^2 + x + 2}}{2x + 1} = 3$ .

Να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (Απ. 7).

**Εργασία 24<sup>η</sup>** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - \eta\mu x}{x + 1} = 3$ .  
Να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (Απ. 3).

**Εργασία 25<sup>η</sup>** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 f(x) - 2x^3}{x^3 + x^2 + 1} = 3$ .

Να βρεθούν τα όρια: **α)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (Απ.  $+\infty$ ) , **β)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$  (Απ. 5)



## «ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm \infty$ ΚΑΙ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ»

**Εργασία 26<sup>η</sup>** Έστω η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 5$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 5x) = 2$ . Να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3f(x) + \lambda x - 2}{xf(x) - 5x^2 + 1} = 3$ . (Απ.  $\lambda = -9$ )

**Εργασία 27<sup>η</sup>** Έστω η συνάρτηση  $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = 3$ . Να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , ώστε :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f(x) + \lambda x - 1}{xf(x) - 2x^2 + 1} = 1$ .

**Εργασία 28<sup>η</sup>** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , όταν :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x \eta \mu \frac{1}{x}}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = 2$ .

**Εργασία 29<sup>η</sup>** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 3x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 4$ .

α) Να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  (Απ. 5).

β) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + \alpha x^2 + 3x}{xf(x) - x^2 + 13} = 3$  (Απ. 7).

## «ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm \infty$ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ - ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ»

**ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 :** Ισχύουν :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$

**Γενικά :**

➤ Αν  $\alpha > 1$  τότε :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\alpha} x = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\alpha} x = +\infty$

➤ Αν  $0 < \alpha < 1$  τότε :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$

**Συχνά :**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

**Εργασία 30<sup>η</sup>** Να βρεθούν τα όρια :

i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + 2x^2 + 5 + e^{x^2+2})$       ii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x - 2020) + \sqrt{x+2})$       iii.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + 2020 - e^x - 5x^2)$

iv.  $\lim_{x \rightarrow 3^+} (\ln(x-3) + x^2 + \sqrt{x-2})$       v.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e^x - x^2) + x^5 + \sqrt{x+4})$  (Απ. 2)

vi.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (\ln(x-2) + x^3 + \sqrt{x-2})$  (Απ.  $-\infty$ )      vii.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + 2x^2 - \ln(1-x))$  (Απ.  $+\infty$ )

viii.  $\lim_{x \rightarrow 5^-} (e^{x-4} + 2x^2 + 2 \ln(5-x))$  (Απ.  $-\infty$ )      ix.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x^3 - 2x) - 2 \ln(x+1))$

x.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2x+3) - \ln(x^2+3x))$

**ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 :**

- Αν έχω μια εκθετική π.χ. μόνο  $e^x$ , τότε τη βγάζω κοινό παράγοντα.
- Αν έχω 2 ή περισσότερες εκθετικές, τότε βγάζω κοινό παράγοντα αυτή με τη μεγαλύτερη βάση αν  $x \rightarrow +\infty$ .  
Αν  $x \rightarrow -\infty$  κοινό παράγοντα βγάζω την εκθετική με τη μικρότερη βάση.

**Εργασία 31<sup>η</sup>** Να βρεθούν τα όρια :

i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^x + 5}{3^x + 2^{x+1} + 2}$  (Απ. 1)

ii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+2} + e^x - 2}{e^x + e^{x+1} + 1}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 3^{x+1}}{2^{x+1} + 3^x}$

iv.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 2^{x+1}}{3^{x+2} + 2^x}$

v.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7^x + 3^x + 1}{8^x + 5^x + 1}$

vi.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x + 5^x - 6}{2^x + 2}$

vii.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^{x+1} + 2^{x+3}}{5^x - 2^{x+1}}$  (Απ. -4)

viii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - \alpha^x}{2^x + 3\alpha^x}, \alpha > 0.$

ix.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 3\lambda^{x+1}}{2^x + \lambda^x}, \lambda > 0.$

**«ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ»****Εργασία 32<sup>η</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \ln x + e^{\frac{1}{x}}$ . Να βρείτε τα όρια : α)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right)$ .

**Εργασία 33<sup>η</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \ln(x - \eta\mu x)$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

β) Να βρείτε τα όρια : 1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , 2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$  και 3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right)$ .

**Εργασία 34<sup>η</sup>**

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  όταν :

α)  $f(x) \geq x^3$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , β)  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  και  $f(x) > \eta\mu x + \ln x$ , για κάθε  $x > 0$ .

**Εργασία 35<sup>η</sup>**

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  όταν :

α)  $(1+x^2)f(x) \leq x^3$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  β)  $f(x) + x^2 < e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$