



## ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΕΝΟΤΗΤΑ :** ΟΡΙΟ ΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ  $x_0 \in \mathbb{R}$  ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ (ΜΟΡΦΗΣ  $\frac{0}{0}$ )

## Μεθοδολογία

Αν το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  είναι της μορφής  $\frac{0}{0}$  και ο τύπος της  $f(x)$  περιέχει απόλυτα, θα πρέπει να τα απαλείψουμε.

• Αν το  $x_0$  δεν μηδενίζει τις συναρτήσεις που είναι μέσα στα απόλυτα, τότε τα βγάζουμε έχοντας υπόψη ότι:

α) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$  τότε:  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , οπότε βγάζουμε το απόλυτο χωρίς να αλλάξουμε τα πρόσημα

της συνάρτησης μέσα στο απόλυτο.

β) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$  τότε:  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$  οπότε βγάζουμε το απόλυτο αλλάζοντας τα πρόσημα της συνάρτησης μέσα στο απόλυτο.

• Αν το  $x_0$  μηδενίζει τις συναρτήσεις που είναι μέσα στα απόλυτα, τότε απαλείφουμε τα απόλυτα χρησιμοποιώντας πίνακα προσήμων για τις συναρτήσεις αυτές στην περιοχή του  $x_0$  χρησιμοποιώντας πλευρικά όρια.

**Εργασία 1<sup>η</sup>** Να βρείτε τα όρια:

α.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-1| - |x-3|}{x^2 - 4}$

β.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x-2| + |x-3| - 9}{x^2 - 4}$

γ.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^3 - 3x - 1| + x}{|x^3 + 5x + 4| - 2}$

δ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^7 - 5x^3 + 2| - |x^5 + 2x^2 - 4x - 2|}{x^2 - 2x}$

**Εργασία 2<sup>η</sup>** Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα παρακάτω όρια.

α.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3| + x^2 - 9}{x-3}$

β.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 3x + 2|}{|x+1| - 2}$

γ.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 4| + 3x^2 - 12}{|x^2 - 3x + 2|}$

δ.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x+2| + |x-1| - 3}{x^2 - x}$

**Εργασία 3<sup>η</sup>** Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x-2| - |x+2|}{|x+2| + |x-2|}$ , ii)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3|x-2| + |x^2 - 7|}{|x+3|}$ , iii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-2| - x^2}{x^2 - x}$

iv)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x+3| - |x-3|}{x^2 - 2x}$ , v)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|5-3x| - |3x-1|}{x^3 - 1}$ , vi)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x + 1}{|x| - 1}$ .

**Εργασία 4<sup>η</sup>**

Να δείξετε ότι:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7|x-1| + 3}{x^2 + 5|x-3| - 9} = 3,$$

$$\text{ii)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4|x-1| + |x| - 2}{|x+2| - 4} = 1,$$

$$\text{iii)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3|x-1| - 1}{x^2 - 5|x-3| + 1} = \frac{1}{9},$$

$$\text{iv)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5|x-1| - |x| + 3}{x^2 - 3|x-3| + |x+1| - 4} = -\frac{1}{4},$$

$$\text{v)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5|x-1| + |x| - 1}{x^2 - 7|x-3| + |x+1|} = 0,$$

$$\text{vi)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2|x-1| - 2}{x^2 - 3|x-3| - 1} = \frac{2}{7}.$$

**Εργασία 5<sup>η</sup>**

Να βρείτε τα όρια:

$$\ell_1 = \ell \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-2| - x^2}{x^2 - x}.$$

$$\ell_2 = \ell \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|5-3x| - |3x-1|}{x^2 - 1}.$$

$$\ell_3 = \ell \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-4| + 3|x| - 10}{x^2 - 9}.$$

$$\ell_4 = \ell \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|x-5| + x^2 - 4x - 5}{x-5}.$$

$$\ell_5 = \ell \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 + x + 2| + |x+3| - 8}{|x^2 + x| - x - 1}.$$

$$\ell_6 = \ell \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2| + x^2 - 4}{x^2 - 4}.$$

$$\ell_7 = \ell \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x+2| + |x^2-3| - 5}{|x| - 1}.$$

$$\ell_8 = \ell \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 2x - 3| + |x-3|}{|x^2 - 4x + 3| + x^2 - 6x + 9}.$$

$$\ell_9 = \ell \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2| + |x^2-4| + x-2}{x^2 + x - 6}.$$

$$\ell_{10} = \ell \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2-9| + |x-3|}{|x+2| - 5}.$$

**Εργασία 5<sup>η</sup>**

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4|x| + 3}{|x-1| - 2},$$

$$\text{ii)} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{2x - 4}}{|x-3|\sqrt{x}}$$

$$\text{iii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x-2| - |x^2-2|}{|x+1| - 1},$$

$$\text{iv)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|x+3| + x^2 + 2x - 3}{x+3},$$

$$\text{v)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2} - \sqrt{4x - 4}}{\sqrt{x^3 - 4x^2 + 4x}},$$

$$\text{vi)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5|x-3| - 11}{x^2 - 1}.$$