



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΕΝΟΤΗΤΑ : « ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ »

Εργασία 1^η

Αν $|f(x) - 3| \leq (x-1)^{2019}$ για κάθε x « κοντά » στο 1, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Εργασία 2^η

Αν για κάθε $x \geq 0$ ισχύει: $2\sqrt{2x} \leq f(x) \leq x+2$, να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2}$

Εργασία 3^η

Δίνεται η συνάρτηση f ώστε $6x \leq f(x) \leq x^2 + 9$. Να υπολογισθούν τα όρια

α) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 18}{x - 3}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 18}{\sqrt{x^2 - 5} - 2}$

Εργασία 4^η

Έστω η συνάρτηση f για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$2x^3 - 8x \leq (x-2) \cdot f(x) \leq 3x^3 - 6x^2 + 4x - 8$. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Εργασία 5^η

Αν $2\sqrt{x+2} \leq f(x) \leq x+3$, για κάθε $x \geq 2$ να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, β) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 2}{x + 1}$ και γ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 \cdot f^2(x) - 8}{x^2 + 3x + 2}$.

Εργασία 6^η

Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\eta x - x^2 \leq f(x) \leq \eta x + x^2$ να βρείτε τα όρια

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2x}{x + \eta x}$

Εργασία 7^η

Αν $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ -x, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$. Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)|$ και β) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

**Εργασία 7^η**

Αν για κάθε $x \in (-1, 1)$ ισχύει : $f^2(x) - 4f(x) \leq |x| - 4$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Εργασία 8^η**(ΒΑΣΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ)**

Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, για $x \neq 0$ έχουμε $\left| x \eta \mu \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq |x|$, αφού $-1 \leq \eta \mu x \leq 1$. Οπότε $-|x| \leq x \eta \mu \frac{1}{x} \leq |x|$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, σύμφωνα με το παραπάνω

ΣΧΟΛΙΟ ***Γενικά όρια της μορφής $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^\nu \eta \mu \frac{a}{x^k} \right)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^\nu \sigma \nu \nu \frac{\beta}{x^\mu} \right)$

λύνονται όπως το παράδειγμα.

Εργασία 9^η

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις :

α) $f(x) = x^5 \cdot \sigma \nu \nu \frac{1821}{(x-2)^{1940}}$, **β)** $\left| f(x) - x^3 \cdot \sigma \nu \nu \left(\frac{2020}{x^{1967}} \right) \right| \leq \eta \mu^4(x^{2019}) \cdot \left[\eta \mu^3 \left(\frac{7}{x^{2019}} \right) \right]^5$

Εργασία 10^η

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με: $1 - x \cdot \eta \mu x < f(x) < \sigma \nu \nu x$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$.

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-1}{x}$. **β)** Αν ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Εργασία 11^η

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$.

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. **β)** Να δείξετε ότι: $x \cdot f(x) > 0$, κοντά στο 0.

γ) Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει: $|x \cdot f(x) \cdot g(x) - x^2| \leq x^2 \cdot f^2(x)$ κοντά στο 0, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

Εργασία 12^η

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με: $f^3(x) + 3 \cdot f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε το $f(0)$ **β)** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

δ) Να υπολογίσετε τα όρια : **1)** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και **2)** $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$