



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: «ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΚΑΙ ΥΠΑΡΞΗ ΟΡΙΟΥ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$ »

Εργασία 1^η Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 5$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - \eta\mu x}{4x - \eta\mu x}$

Εργασία 2^η Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{2, 4\}$ ισχύει η ισότητα: $f(x-2) = -f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 5$.

Να βρεθούν : α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και β) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)+2}{x-3}$

Εργασία 3^η

Δίνεται άρτια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-x}{x^2-9} = 2$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ γ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-3}{\eta\mu(x-3)}$

Εργασία 4^η

Δίνεται άρτια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x}$ δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) + \eta\mu f(x)}{x}$

Εργασία 5^η

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta\mu 5x}{x^2 + 2x} = 4$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ β) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(\sigma\upsilon\nu x)}{x - \frac{\pi}{2}}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\eta\mu 3x + x - x\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$

Εργασία 6^η

A. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις :

α) η f είναι άρτια, β) η f είναι περιττή.

B. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ και $f(x) + f(x-2) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τα όρια :

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

Εργασία 7^η

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+1) = f(x) - 5$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$, $f(x) \cdot x^3 \leq \eta\mu^2 3x \cdot \eta\mu x$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \kappa \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, β) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ και γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) + \eta\mu 5x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu 5x}{\eta\mu^2 3x + x^2}$

**Εργασία 8^η**

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και η οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f(x+y) = f(x) \cdot \sin(2y) + f(y) \cdot \sin(2x). \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1, \text{ να βρείτε το όριο: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Εργασία 9^η

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

β) Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

γ) Αν ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2020$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x-2} = 2020 \quad \text{και} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x) - \eta\mu(f(x))}{x} = 0$$

Εργασία 10^η

Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$.

α) Να βρείτε το $f(1)$. β) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, για κάθε $x_0 > 0$

Εργασία 11^η

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad \text{και} \quad 2. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ για κάθε } x_0 \in \mathbb{R}$$

Εργασία 12^η

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ και $\lim_{h \rightarrow 3} \frac{f(3+h)}{h} = 6$

α) Να βρείτε το $f(3)$.

β) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9}$