



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (2)

ΕΝΟΤΗΤΑ: «Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$ »Εργασία 1^η: (Όριο συνάρτησης σε ανίσωση)

1. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x f(x) - 2 f(x) \leq x^2 - 5x + 6$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
2. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x - 2) f(x) \leq x^2 - 7x + 10$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Εργασία 2^η: (Όριο με χρήση βοηθητικής συνάρτησης)

1. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ αν ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5f(x) - 1}{f(x) + 3} = 8$
2. Αν για την συνάρτηση f ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 4}{\sqrt{f(x)} + 2} = 1$, τότε να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
3. Αν ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^3}{x^2 - 1} = 2$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{\sqrt{x} - 1}$
4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} = 4$ Να βρείτε τα όρια:
α) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + x - 4}{|x - 3| - 1}$
5. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 2} [x f(x) + x^2 - 8] = 6$.
Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 5 f(x)}{\sqrt{f(x)} - 1 - 2}$
6. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x) \cdot g(x)]$, όταν ισχύουν $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x + 1} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow -1} [g(x)(x^2 - x - 2)] = -3$

Εργασία 3^η: (Προσδιορισμός παραμέτρων γνωρίζοντας την ύπαρξη ορίου)

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \alpha x - 2}{x - 1}$. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α , αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός.
2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\alpha x^2 + \beta x - 6}{x^2 - 1} = 4$.
3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - \alpha x}{x - 1} = \beta$
4. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\alpha \cdot |x + 3| + \beta \cdot |x - 5| - 3}{x^2 - 5x + 4} = 7$.
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x + 3} - 2} & , \text{ αν } -3 \leq x < 1 \\ \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x^2 - 3x + 2} & , \text{ αν } 1 < x < 2 \end{cases}$ Να βρείτε τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

**Εργασία 4^η: (Κριτήριο παρεμβολής)**

- Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $2x^2 - 7x + 5 \leq f(x) \leq x^2 - x - 4, x \in (2, 6)$.
Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2}{x - 3}$
- Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^2 + x \leq f(x) \leq 12\sqrt{x+3} - 22$.
Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$
- Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x) - x + 2| \leq x^2 - 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|xf(x) - 2f(x) - x^2 + 4| \leq x^2 - 4x + 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f^2(x) \pm 4f(x) \leq x^2 - 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) \leq 2x^2 f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Εργασία 5^η: (Τριγωνομετρικά όρια)

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\begin{aligned} \text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^2 - x} \quad & \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x - 2\eta\mu x}{x^2 + x} \quad & \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x^2 - x} \quad & \text{iv. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x^2 + x} \quad & \text{v. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{\sqrt{x+1} - 1} \\ \text{vi. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 4} - 2} \quad & \text{vii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \eta\mu x}{2x + 3\eta\mu x} \quad & \text{viii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sqrt{x^2 + 4} - 2} \quad & \text{ix. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\eta\mu x} - \sigma\upsilon\nu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} \end{aligned}$$

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\begin{aligned} \text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right) \quad & \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{x} \cdot \eta\mu \frac{1}{x^2} \right) \quad & \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x - x}{x} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right) \quad & \text{iv. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x+1} - 1} \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) \\ \text{v. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu^2 x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{x} \right) \quad & \text{vi. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}{\eta\mu x} \quad & \text{vii. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 + x \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right) \quad & \text{viii. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 + 1 + x^3 \eta\mu \frac{3}{x} \right) \end{aligned}$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta\mu 5x}{x} = 7$. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + f(x)\eta\mu x + \eta\mu 2x \cdot \eta\mu 3x}{xf(x) + \eta\mu^2 2x}$$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $2x\eta\mu x \leq f(x) \leq x^2 + \eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Να βρείτε τα όρια: i. } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1 - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x \cdot \eta\mu 3x}$$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x^2 f^2(x) - 2xf(x) \cdot \eta\mu x \leq x^4 - \eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Να βρείτε τα όρια: i. } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\eta\mu x + \sigma\phi x}{x^2 + 3x - \eta\mu 5x}$$