



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (3)

ΕΝΟΤΗΤΑ: «Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$ - Γενικές ασκήσεις»Εργασία 1^η:

1. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, +\infty)$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f(x)-2| - |f^2(x)-5f(x)| + 5}{\sqrt{f(x)+1} - 2}$.
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + \beta x}{x^2 - 3x + 2}$ με $a, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. Να βρείτε τις τιμές των a και β καθώς και το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1}$.
3. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|xf(x) - 2f(x) - x^2 + 4| \leq x^2 - 4x + 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
4. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\frac{f^2(x) - 6xf(x)}{x+3} \leq x-3$, για κάθε $x > -3$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Εργασία 2^η: (αλλαγή μεταβλητής)

1. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f(x) = f(x+3)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - 2x + 5] = 4$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
2. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 3x + 4] = 5$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.
3. Για την συνάρτηση f ισχύει $f(a-x) = f(x) + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow a} [2f(x) + 2x + a] = 1$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
4. Αν για την περιττή συνάρτηση f ισχύει $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3$, τότε να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 4} [f(x-2) - f(2-x)]$.
5. Δίνεται άρτια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-x}{x^2-9} = 2$. Να βρείτε τα όρια : **α.** $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ **β.** $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

Εργασία 3^η: (αλλαγή μεταβλητής - συναρτησιακές)

1. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(xy) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y > 0$ και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$.
Αν a θετικός αριθμός, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(x) - af(a)}{x-a}$.
2. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και επιπλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, να αποδείξετε ότι ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
3. Αν ισχύει $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) + xy$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1$, τότε να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x) - f(1)}{x-1}$.
4. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y) - xy$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4$.
Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$, $a \in \mathbb{R}$.
5. Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(xy) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y > 0$ και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.
Να αποδείξετε ότι : **α.** $f(1) = 0$. **β.** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, για $x_0 > 0$ και $x_0 \neq 1$.
6. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x)f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
Να αποδείξετε ότι : **α.** $f(0) = 1$. **β.** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, για $x_0 \in \mathbb{R}$.

Εργασία 4^η:

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \eta\mu x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}} & , x > 0 \\ \frac{5\eta\mu x + 9x}{3\eta\mu x + 4x} & , x < 0 \end{cases}$. Να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x + \eta\mu 3x}{x} & , x < 0 \\ \frac{3x\eta\mu x + \eta\mu 3x \cdot \eta\mu 5x}{x^3 + 3x^2} & , x > 0 \end{cases}$. Να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

3. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta\mu 3x}{x^2 + x} = 2$. Να βρείτε τα όρια: α. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) + \sqrt{x+1} - 1}{\eta\mu 5x}$

4. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta\mu 5x}{x^2 + 2x} = 4$. Να βρείτε τα όρια: α. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\eta\mu 3x + x - x \sin x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$

Εργασία 5^η:

1. Για μια συνάρτηση f ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(2x) + f(-x)\eta\mu 3x}{\eta\mu^2 x - 2x^2}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + \eta\mu \frac{\pi(x-1)}{2} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\pi}{2}$. Να υπολογισθούν τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ β. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$

3. Δίνεται άρτια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x}$ β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) + \eta\mu f(x)}{x}$

4. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) - \eta\mu x \cdot \eta\mu y$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, $f(0) \neq 0$ και

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 0$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, $a \in \mathbb{R}$.

Εργασία 6^η:

1. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $|f(x) \cdot \eta\mu x - 3x| \leq x^2$, να υπολογιστούν τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + \eta\mu 2x}{xf(x) + \eta\mu x}$

2. Αν για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$ και $f(x)\eta\mu x \geq x^3 \sin \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, τότε να προσδιορίσετε τον αριθμό $a \in \mathbb{R}$.

3. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες κοντά στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \neq 0$ ικανοποιούν την σχέση $x^2 f^2(x) + g^2(x) \leq x^4 \eta\mu \frac{2\pi}{x}$. Να υπολογιστούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.