



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (5)

ΕΝΟΤΗΤΑ: «Όριο στο άπειρο»

Εργασία 1^η: (Όριο Πολυώνυμης Συνάρτησης) Να βρεθούν τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^3 - 2x^2 + 5x - 3) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 + 5x - 1) \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^5 + 3x^2 - 1)$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - 5x + 7) \quad \epsilon) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + x + 3) \quad \sigma\tau) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + 4x^2 - 20)$$

Εργασία 2^η: (Όριο Ρητής Συνάρτησης) Να βρεθούν τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 - 5x^2 + 7x - 4}{2x^2 - 3x + 5} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5 - 5x^2 + 2x - 6}{2x^3 + 5x^2 - x - 6} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^6 + 4x^2 - 5x - 3}{-6x^3 + 2x^2 + 7x + 4}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x - 5}{2x^3 + x + 2017} \quad \epsilon) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5 - x^2 + 3x - 1}{2x^8 + 5x^2 - 2x + 6} \quad \zeta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x-1} + \frac{3x}{x+1} \right)$$

$$\eta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 - x}{x+2} - \frac{x^2 + 1}{x} \right) \quad \sigma\tau) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x-2} + \frac{x^2}{x+3} \right) \quad \iota) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 3x}{x+1} - \frac{x^2 - 4x}{x-1} \right)$$

Εργασία 3^η: (Όριο με απόλυτες τιμές) Να βρεθούν τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} |3x^2 - 5x + 6| \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} |2x^3 - 3x^2 + 6x - 1| \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} |-5x^2 + 6x - 1|$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 5x + 4| - 6x^2}{|x^3 - 3x^2 + 5| - x^3} \quad \epsilon) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^3 + 4x^2 - 3x + 5| + x^3}{|x^2 - 2x - 3| - x^2} \quad \sigma\tau) \lim_{x \rightarrow +\infty} (|x^3 - x^2 + 2| - |x^3 + x^2 + 4|)$$

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^5 - x^2 + 1| - |x^5 - x|}{x^2 + x + 1} \quad \eta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x^{2017} - x^2 + 3x - 4|) \quad \theta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^{2019} - x^3| - x \cdot |x^{2018} - x^2 - 1| + 1}{x - 1}$$

Εργασία 4^η: (Όριο Άρρητης Συνάρτησης) Να βρεθούν τα όρια :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2} \quad 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 5x + 2} \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2}{\sqrt{4x^2 + 7}} \quad 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2 + 5}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{16x^2 + 3}{9x^2 - 2x + 1}} \quad 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{4x^2 - x - 5} \quad 7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 2} + x) \quad 8) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - 2x)$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 5}{\sqrt{x^2 + 3} - 2x} \quad 10) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{9x^2 + 1}) \quad 11) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x + 1)$$

$$12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 3} + x} \quad 13) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + 3x - 1}) \quad 14) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x + 3} - \sqrt{4x^2 + x + 2})$$

Εργασία 5^η: (Όριο Εκθετικής Συνάρτησης) Να βρεθούν τα όρια :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 3 \cdot 2^x}{3^x - 2^x} \quad 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{x+1} + 5 \cdot e^x}{2 \cdot 3^x - e^x} \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \cdot 5^{x+2} + 5 \cdot 3^{x+1}}{2 \cdot 5^{x+1} - 3^{x+2}} \quad 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 \cdot e^x + 2^{2x}}{2 \cdot e^{x+1} - 2^{2x+3}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} \quad 6) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^3 - x} \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2}} \quad 8) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{3x} - 4e^{2x} + 5e^x - 3)$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{\frac{x^3 - 5x + 3}{x - 4}} \quad 10) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x^2 + 5x}{x + 2}} \quad 11) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\sqrt{x^2 + 3} + x}$$

**Εργασία 6^η: (Όριο Λογαριθμικής Συνάρτησης)** Να βρεθούν τα όρια :

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x + 3)$ 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 3)$ 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 2)$ 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$ 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^2}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^3 + 2x) - \ln(x^2 - 1)]$ 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x + 2) - \ln(x^2 + 3x)]$ 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(3^x + 5^x) - x]$
- 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + 2) - 3x]$ 10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x - \sqrt{x^2 + 2x + 3}]$ 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^{x+2} + 3) - x - 2]$

Εργασία 7^η: (Το Κριτήριο Παρεμβολής στο Άπειρο)

1. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με: $6x^3 - 5x^2 + 2 \leq f(x) \leq 6x^3 + 2x^2 + 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^2 + 3x - 5}$ γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{2x^3 - x + 25}$ δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^4 - 2x^3 + x}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $|(x^2 + 1)f(x) - x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $|f(x) + x| \leq e^{\frac{1}{x^2}}, \forall x \neq 0$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $|(x^3 + 1)f(x) - 2x^3| \leq x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \cdot \eta\mu x \right)$

Εργασία 8^η: (Τριγωνομετρικά όρια)

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2\eta\mu x)$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \eta\mu x}{x^2 + 3}$ 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2\eta\mu x}{x + \eta\mu x}$ 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \eta\mu x}{x}$ 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 3 \eta\mu x}{5x + 3}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 3 \eta\mu x}{5x - 3 \sigma\upsilon\nu x}$ 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \eta\mu x}{x^2 - 5x + 3}$ 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\sqrt{x^2 + 2} - x)\eta\mu 4x]$ 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}{2x + 3}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 4x - 3}{x + 2} \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$ 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{\frac{2x - 3 \eta\mu x}{2x + \sigma\upsilon\nu x}}$ 12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^2 + \sigma\upsilon\nu x) - \ln x]$

Εργασία 9^η: (Χρήση βοηθητικής συνάρτησης)

1. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f(x) - \sqrt{x^2 + x + 2}}{2x + 1} = 3$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f(x) - \eta\mu x}{x + 1} = 3$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = -2$. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f(x) + x^2 + 1}{x f(x) - 3x^2 + 2}$

Εργασία 10^η: (Υπολογισμός παραμέτρων)

1. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x - 2} + \alpha x + \beta \right) = 5$ $\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3 + 1}{x^2 + 2} - \alpha x - \beta \right) = 0$

$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 8x - 5} + \alpha x + \beta) = -5$ $\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 6x} + \alpha x + \beta) = 2$

2. Έστω η συνάρτηση $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = 3$.

Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f(x) + \lambda x - 1}{x f(x) - 2x^2 + 1} = 1$

3. Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, να βρείτε τα όρια: $\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\alpha - 2)x^3 + (1 - \alpha)x^2 - 2x + 3]$

$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\alpha - 1)x^3 - 2\alpha x^2 + 3x - 1]$ $\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\alpha - 2)x^2 + 2x + 3}{\alpha x + 1}$ $\blacksquare f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \alpha \cdot x, x \in \mathbb{R}$.