

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ****ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΕΝΟΤΗΤΑ : ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ «1-1»****Εργασία 1^η** Να εξετάσετε αν είναι «1-1» οι παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = 2x^3 - 4$, β) $f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 1}$, γ) $f(x) = 2 - \sqrt{4 + 3x}$, δ) $f(x) = 3\ln(x+2) - 1$

ε) $f(x) = 2x + e^x + 3$, στ) $f(x) = \sqrt{x} + \ln x - 1$

Εργασία 2^η

Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι «1-1»

α) $f(x) = x^2 - 3$, β) $f(x) = 5 + |x - 4|$, γ) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 7$

Εργασία 3^ηΈστω η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = x^{2019} + x^{2021}$, $x \in \mathbb{R}$.α) Να βρείτε το $f(1)$. β) Να δείξετε ότι η f είναι «1-1».γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^{2019} + x^{2021} = 2$, στο $\mathbb{R}$.**Εργασία 4^η**Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - x - 1$ α) Να δείξετε ότι η f είναι «1-1»β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{-x} = x + 1$ γ) Να λύσετε την εξίσωση $f((x+1)e^x - 1) = 0$ δ) Να λύσετε την εξίσωση $e^{-2x+1} - e^{-x} = x - 1$ **Εργασία 5^η**Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 2x^3 - 3$ α) Να δείξετε ότι η f είναι «1-1»β) Να λύσετε την εξίσωση $x^5 + 2x^3 = 3$ γ) Να λύσετε την εξίσωση $(3x-2)^5 + 2(3x-2)^3 = 3$ **Εργασία 6^η**Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 1$ α) Να δείξετε ότι η f είναι «1-1»β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln x^x + x = 1$ γ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 2} = \frac{1 - x^2}{(2x^2 + 1)(x^2 + 2)}$ **Εργασία 7^η**

Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $e^{x-1} + \ln x = 1$, β) $e^{\frac{1}{x}} - \ln x = e$, γ) $\ln \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 2} = e^{x^2 + 2} - e^{2x^2 + 1}$

**Εργασία 8^η**

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση $e^{f(x)} - e^x = e^x \cdot f^2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

Εργασία 9^η

Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και ισχύει η σχέση: $e^{f(x)} - \ln x = f^2(x) \cdot \ln x$, για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

Εργασία 10^η

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση: $f(f(x)) = f^3(x) - e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(f(x) + x^2 - x) = f(f(x) + 2x - 2)$

Εργασία 11^η

Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση: $f(f(x)) = f(x) + \ln x - 1$, για κάθε $x > 0$ τότε:

α) να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1» και β) να λυθεί η εξίσωση $f(x^3 - 5x) = f(2x - 6)$

Εργασία 12^η

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν: $(g \circ f)(x) = 2x^5 + e^{f(x)} + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1». β) Να λυθεί η εξίσωση: $f(\ln x) = f(1 - x^3)$

Εργασία 13^η

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(f(x)) + x^3 = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι: α) $f(0) = 0$, β) η f είναι «1-1».

Εργασία 14^η

Αν οι συναρτήσεις h, g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $(h \circ g)(x) = x$, τότε:

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι «1-1». β) Να λύσετε την εξίσωση: $g(x^2 - 2x + 8) = g(2 + 3x)$.

Εργασία 15^η

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(f(x)) = x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι: α) $f(1) = 1$, β) η συνάρτηση $g(x) = x^2 - x \cdot f(x) + 1$ δεν είναι «1-1».

Εργασία 16^η

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$, η f είναι «1-1» και ισχύει: $3 \cdot g(x) + f(x - 5) = g(g(x))$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) να δείξετε ότι η g είναι 1-1, β) να λυθεί η εξίσωση: $g(e^{2x} + x + 1) = g(2 - x^3)$, $x \in \mathbb{R}$.