



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΙΣΟΤΗΤΑ - ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ »

Εργασία 1^η: Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν είναι, να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο, του $\mathbb{R}$, στο οποίο είναι ίσες.

1. $f(x) = \ln(x^2-9)$ και $g(x) = \ln(x-3)+\ln(x+3)$

2. $f(x) = \sqrt{x^2}$ και $g(x) = (\sqrt{x})^2$

3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ και $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$

4. $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2+3|x|}$ και $g(x) = 1-\frac{3}{|x|}$

5. $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{|x|}$ και $g(x) = \sqrt{|x-1|} + \sqrt{x}$

6. $f(x) = \ln x^4$ και $g(x) = 4\ln x$

7. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ και $g(x) = -\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$.

Στην περίπτωση που δεν είναι, να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο, του $\mathbb{R}$, στο οποίο είναι ίσες.

Εργασία 2^η: Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{x - \alpha + 2}$ και

$$g(x) = \frac{x^2 - (\alpha + \beta - 1)x + 2\alpha - 3}{x + \beta - 1}, \text{ να είναι ίσες}$$

Εργασία 3^η: Να οριστούν οι συναρτήσεις: $f-g$, $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$ όταν :

α) $f(x) = \ln(x+1)$ και $g(x) = \sqrt{4-|x|}$, β) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ και $g(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$.

Εργασία 4^η: Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους :

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x < 0 \\ (x-2) \cdot 2^{-x}, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 2, & \text{αν } x > 1 \end{cases} \text{ και } g(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{αν } x < 0 \\ x - 2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Να οριστεί η συνάρτηση f/g , να γίνει η γραφική της παράσταση και απ' αυτήν να προσδιοριστεί το σύνολο τιμών της.

Εργασία 5^η: Να βρεθεί η $f \circ g$ όταν:

α) $f(x) = \sqrt{2-x}$ και $g(x) = x^2 + 2x - 6$. β) $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ και $g(x) = \frac{x-2}{x+1}$

Εργασία 6^η: Να βρεθεί η $g \circ f$ όταν:

α) $f(x) = x^2 - 2x + \sqrt{x}$ και $g(x) = x^3$, β) $f(x) = \ln x$ και $g(x) = 1 + e^x$

Εργασία 7^η: Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους: $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}$ και $g(x) = x + \frac{1}{x}$. Να

ορίσετε την συνάρτηση $h(x) = f \circ g$ και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.



Εργασία 8^η: Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους: $f(x) = 2x-1$, και $x \in [-3,3]$ και $g(x) = 5-2x$, και $x \in [3,7]$. Να οριστούν οι συναρτήσεις: $f \circ g$ και $g \circ f$.

Εργασία 9^η: Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους: $f(x) = x^2 - 2x + 3$, και $x \in [-3,1]$ και $g(x) = x + 2$, και $x \in [-2,3]$. Να οριστούν οι συναρτήσεις: $f \circ g$ και $g \circ f$. (Τι συμπεραίνετε;)

Εργασία 10^η: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f . β) Αν $g(x) = -x$, τότε οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $-f$ είναι ίσες

Εργασία 11^η:

Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $[7,27]$ να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(x^3 + x - 3)$.

Εργασία 12^η: Δίνονται οι συναρτήσεις f και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x-2$ και $(f \circ g)(x) = x^2 + x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η συνάρτηση f .

Εργασία 13^η: Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $\ln[1+f(x)] = x^2 + \ln[1-f(x)]$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $|f(x)| < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρεθεί η συνάρτηση f και να γραφεί ως σύνθεση δύο απλούστερων συναρτήσεων

Εργασία 14^η: α) Αν $f(x) = 1 + \ln x$ και $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$, να βρείτε τη συνάρτηση ϕ που ικανοποιεί τη σχέση $(\phi \circ f)(x) = g(x)$

β) Να βρεθεί η συνάρτηση g αν δίνεται ότι: $(g \circ f)(x) = \frac{x}{2x^2 + 2x + 1}$ και $f(x) = 2x + 1$

γ) Να βρεθεί η συνάρτηση f αν δίνεται ότι: $(g \circ f)(x) = \frac{2x-1}{x^2 - x + 1}$ και $g(x) = x - 2$

Εργασία 15^η: Δίνετε η συνάρτηση: $f(x) = \frac{\alpha x - 3}{x - 1}$. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $f(f(x)) = x$.

Εργασία 16^η: α) Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $(f \circ f)(x) = 4 - x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί $f(2)$.

β) Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $(f \circ f)(x) = x^5$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x^5) = f^5(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Εργασία 17^η: Δίνονται οι συναρτήσεις f και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f \circ g)(x) = x^2 - 3x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $(g \circ f)(2) = 2$. Να δείξετε ότι: οι C_f και C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.