



## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

## ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΕΝΟΤΗΤΑ : «Συνέχεια συνάρτησης»

Α

Ονοματεπώνυμο:

Τμήμα: .....

Ημερομηνία: ..... / ..... / .....

Βαθμός :

## ΘΕΜΑ Α

Α1. Τότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα διάστημα  $[a, \beta)$  : (μ. 10)

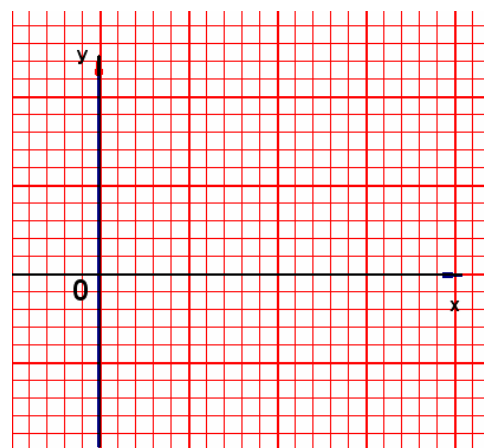
Απάντηση: .....  
.....  
.....  
.....  
.....

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano και να ερμηνευτεί γεωμετρικά. (μ. 15)

Απάντηση:

Σχήμα

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σωστές ή λάθος; (μ.  $5 \times 3 = 15$ )

- α) Αν για μια συνάρτηση  $f$  ισχύουν  $f(a) \cdot f(\beta) < 0$  και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (a, \beta)$ , τότε η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ .
- β) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε  $x \in \Delta$  ή είναι αρνητική για κάθε  $x \in \Delta$ , δηλαδή διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα  $\Delta$ .
- γ) Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.
- δ) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η σύνθεσή τους  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .
- ε) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(a, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα  $(A, B)$  όπου  $A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  και  $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$

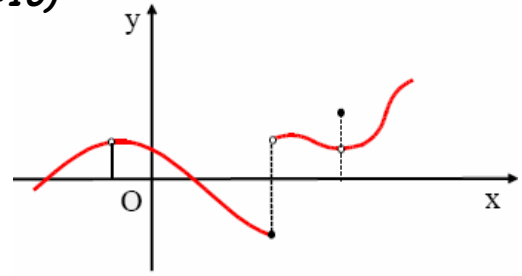
| α | β | γ | δ | ε |
|---|---|---|---|---|
|   |   |   |   |   |



**A4.** Να επιλέξετε κάθε φορά την σωστή απάντηση: (μ.  $2 \times 5 = 10$ )

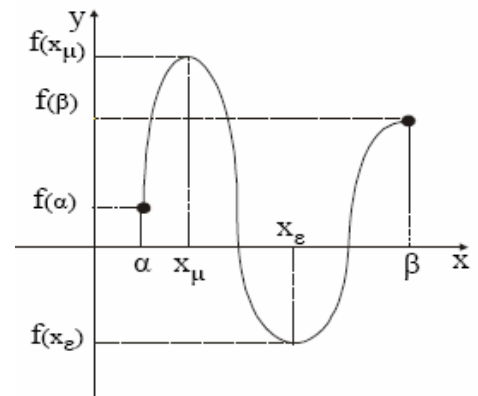
1) Πόσα σημεία ασυνέχειας έχει η συνάρτηση με την γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος ;

- α. 0      β. 1      γ. 2      δ. 3      ε. 4



2) Η γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης  $f$  είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα. Το σύνολο τιμών της  $f$  είναι

- α.  $[f(\alpha), f(\beta)]$       β.  $(f(x_\epsilon), f(x_\mu))$       γ.  $[f(\beta), f(\alpha)]$   
δ.  $[f(x_\epsilon), f(x_\mu)]$       ε. κανένα από τα προηγούμενα



### ΘΕΜΑ Β

Έστω η  $f$  συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  με  $f(x) \neq 0$ ,  $x \in [\alpha, \beta]$ .

**B1.** Να δείξετε ότι  $f(\alpha)f(x) > 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

(μ. 20)

**B2.** Αν για την συνάρτηση  $g$  με  $g(x) = \frac{f(x) + f(\alpha)}{1 + f(\alpha)f(x)}$ ,  $x \in [\alpha, \beta]$  υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  ώστε  $g(x_0) > 1$

τότε η εξίσωση  $f(x) = 1$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(\alpha, \beta)$ .

(μ. 30)

Λύση:



## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

## ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΗ ΕΝΟΤΗΤΑ : «Συνέχεια συνάρτησης»

B

Ονοματεπώνυμο:

Τμήμα: .....

Ημερομηνία: ..... / ..... / .....

Βαθμός :

## ΘΕΜΑ Α

Α1. Τότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta]$ ; (μ. 10)

Απάντηση: .....

.....

.....

.....

.....

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών και να ερμηνευτεί γεωμετρικά. (μ. 15)

Απάντηση:

Σχήμα

.....

.....

.....

.....

.....

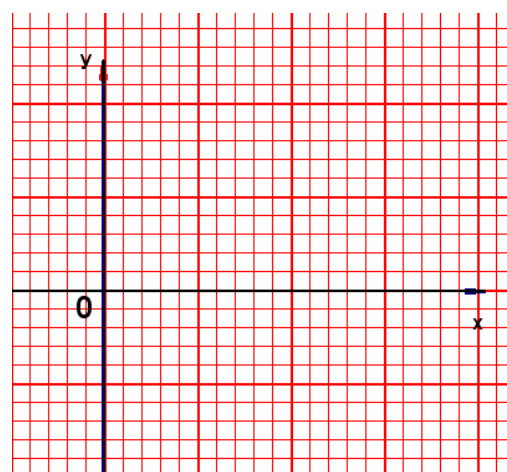
.....

.....

.....

.....

.....

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σωστές ή λάθος; (μ.  $5 \times 3 = 15$ )α) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε  $x \in \Delta$  ή είναι αρνητική για κάθε  $x \in \Delta$ , δηλαδή διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα  $\Delta$ .β) Αν για μια συνάρτηση  $f$  ισχύουν  $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$  και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$ , τότε η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ .γ) Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης  $f$  είναι πάντα διάστημα.δ) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα  $(A, B)$  όπου  $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$  και  $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$ .ε) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $f(x_0)$ , τότε η σύνθεσή τους  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

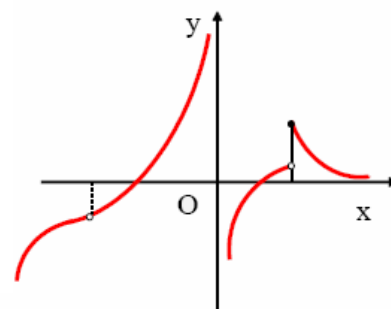
| α | β | γ | δ | ε |
|---|---|---|---|---|
|   |   |   |   |   |



**A4.** Να επιλέξετε κάθε φορά την σωστή απάντηση: (μ.  $2 \times 5 = 10$ )

1) Πόσα σημεία ασυνέχειας έχει η συνάρτηση με την γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος ;

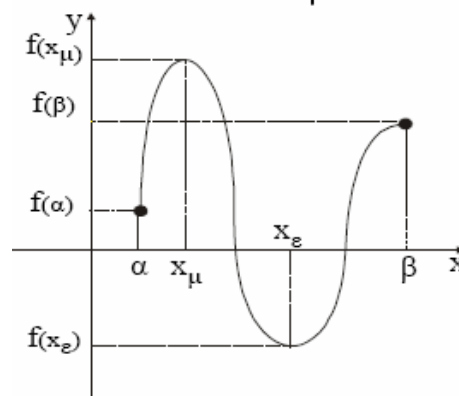
α. 0    β. 1    γ. 2    δ. 3    ε. κανένα από τα προηγούμενα



2) Η γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης  $f$  είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα. Το σύνολο τιμών της  $f$  είναι

α.  $[f(\alpha), f(\beta)]$     β.  $[f(x_\epsilon), f(x_\mu)]$     γ.  $[f(\beta), f(\alpha)]$

δ.  $(f(x_\epsilon), f(x_\mu))$     ε. κανένα από τα προηγούμενα



## ΘΕΜΑ Β

Έστω η  $f$  συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  με  $f(x) \neq 0$ ,  $x \in [\alpha, \beta]$ .

**B1.** Να δείξετε ότι  $f(\beta)f(x) > 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

(μ. 20)

**B2.** Αν για την συνάρτηση  $g$  με  $g(x) = \frac{f(x) + f(\beta)}{1 + f(\beta)f(x)}$ ,  $x \in [\alpha, \beta]$  υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  ώστε  $g(x_0) > 1$

τότε η εξίσωση  $f(x) = 1$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(\alpha, \beta)$ .

(μ. 30)

Λύση: