



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (1α)

ΕΝΟΤΗΤΑ: «Συνέχεια συνάρτησης»

Εργασία 1^η: 1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 25} + 2\beta & , x < 0 \\ x^2 + \alpha & , x \geq 0 \end{cases}$. Να βρείτε τα α, β ώστε η f να είναι συνεχής και $f(1)=12$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & , x \leq -1 \\ \alpha x + \beta & , -1 < x < 1 \\ \ln x & , x \geq 1 \end{cases}$. Να βρείτε τα α, β ώστε η f να είναι συνεχής.

Εργασία 2^η: 1. Να μελετήσετε την συνέχεια της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \frac{2x - \eta \mu x}{x + \eta \mu x} & , x \neq 0 \\ 0,5 & , x = 0 \end{cases}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16 & , 0 < x < 5 \\ (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \ln(x - 5 + e) + 2(\alpha + 1) \cdot e^{5-x} & , x \geq 5 \end{cases}$. Να βρείτε τα α, β ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x_0=5$.

Εργασία 3^η: 1. Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $-4 \leq f^2(x) - 4f(x) \leq x^2 - 4$ για κάθε x . Να δείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0=0$.

2. Αν η f είναι συνεχής με $f(0)=0$, να δείξετε ότι η $g(x) = \begin{cases} f(x) \eta \mu \frac{3}{x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $x_0=0$.

3. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + 2(x-1) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το 1.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2(\alpha - 1)x^2 - 1 & , x < 1 \\ x^2 - x \cdot \ln \alpha - 1 & , x \geq 1 \end{cases}$. Να βρείτε το α ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Εργασία 4^η:

1. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $x_0=0$. Να βρείτε το $f(0)$ αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\eta \mu x - x^2 \leq x f(x) \leq x + x^2$

2. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $x_0=2$. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + f(x)}{x^2 - 4} = 2019$, να βρείτε το $f(2)$.

3. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $x f(x) = \eta \mu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(\pi)$ και το $f(0)$



Εργασία 5^η: 1. Αν f συνεχής στο 0 με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sqrt{16+x}}{x} = 5$.

α) Να δείξετε ότι το $M(0,4)$ ανήκει στην C_f . β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

2. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $x_0=2$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x - 2} = 2018$.

α) Να βρείτε το $f(2)$ β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) - 2f(2)}{x^2 - 4}$

Εργασία 6^η: 1. Για την συνάρτηση f ισχύει $f^2(x) + 2x\eta\mu x \leq 2xf(x) + \eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε: α) το $f(0)$ β) το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ii) Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

2. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \eta\mu 3x}{x^2 + x} = 2$, να βρείτε το $f(0)$.

Εργασία 7^η: 1. Αν f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}_+$ και $(x-4)f(x) = \sqrt{x} - 2$, να βρείτε τον τύπο της.

2. Αν f συνεχής στο 0 και ισχύει $|xf(x) - \eta\mu 2x| \leq x^4$ για κάθε x , να δείξετε ότι $f(0)=2$.

3. Έστω f συνεχής με $xf(x) + \sigma\upsilon\nu x = 1 - x^2 \eta\mu \frac{1}{x}$. α) Να βρείτε το $f(0)$. β) Να βρείτε τον τύπο της f .

4. Αν $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)}{h} = 6$ και η f είναι συνεχής στο 3, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9}$

5. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + x^2}{x^2 - 4} = 3$ και η f είναι συνεχής στο 2, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(x) - 4f(2)}{\sqrt{x+2} - 2}$

Εργασία 8^η: 1. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ περιττή συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + x^2 - x - 2}{x - 3} = 5$.

Αν η f είναι συνεχής στο 3 τότε: α) Να υπολογίσετε το $f(3)$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και στο -3 .

2. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $x_0=1$, για την οποία ισχύει $f(4-x)=f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ και

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 4}{x - 1} = 5$. α) Να βρείτε το $f(1)$. β) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και στο $x_1=3$.

Εργασία 9^η:

1. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $x_0=0$ και $f(0)=2$, για την οποία ισχύει $f(2+x)+f(x)=x^2+3$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και στο $x_1=2$.

2. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $x_0=1$, για την οποία ισχύει $(x-1)f(x) \geq x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε το $f(1)$.

3. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) + x^2 - 2x - 5}{x + 2} = 2018$. Αν η C_f διέρχεται από το $M(-2, -3)$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=-2$.