

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (2)****ΕΝΟΤΗΤΑ: «Θεώρημα Bolzano - Υπαρξη ρίζας»**

Εργασία 1^η: 1. Να δείξετε ότι: **α)** Η εξίσωση $(x+1)2^{x+1} - 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,0)$
β) $x^4 + (a^2 - 2)x^2 + (a-1)x = a^2, a \neq 0$ στο $(0,2)$

2. Να αποδείξετε ότι: **α)** η εξίσωση $\frac{x^{2018} + 1}{x+1} + \frac{x^{2020} + 2}{x-1} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$.

β) η εξίσωση $\frac{\varepsilon\phi x}{6x - \pi} + \frac{\sigma\phi x}{4x - \pi} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$.

3. Όμοια και οι εξισώσεις: **α)** $3x + \ln x^4 = x^2 + 4$ στο $(1,e)$ **β)** $e^x - 1 = \frac{\sin x}{x}$ στο $(0,1)$.

Εργασία 2^η: 1. Έστω f συνεχής στο $[a, \beta]$ με $f(a) \neq f(\beta)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ ώστε $5f(x_0) = 2f(a) + 3f(\beta)$.

2. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$ και $f(a) = g(\beta), f(\beta) = g(a)$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

3. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(a) + f(\beta) = a^2 + \beta^2$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x^2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (a, β) .

4. Δίνεται η συνεχής και αύξουσα συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow [5,6]$. Να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την $y = 5x^2 - x + 4$.

5. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $[a, \beta]$. Να δείξετε ότι η $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (a, β) αν: **i)** $(1+a^2)f(a) + (1+\beta^2)f(\beta) = 0$ **ii)** $e - af(a) + e - \beta f(\beta) = 0, a, \beta \neq 0$

6. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[0,2]$ ώστε $f(0) = f(4)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = f(x_0 + 2)$.

7. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ όπου β, γ πραγματικοί με $\beta^2 < 4\gamma$. Να δείξετε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της f στο $(0,1)$.

Εργασία 3^η: 1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \cdot 3^x - 1 = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\gamma - x}{x - \beta} - a = 0$, με $a, \beta, \gamma > 0$ και $\gamma < \beta$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο (β, γ) .

3. Δίνονται οι συνεχείς και αύξουσες συναρτήσεις f και g στο $[a, \beta]$, για τις οποίες ισχύουν $f(a) = -g(\beta)$ και $f(\beta) = -g(a)$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό x_0 στο (a, β) τέτοιο ώστε $f(x_0) = -g(x_0)$.

4. Έστω συνάρτηση f συνεχής και φθίνουσα στο $\Delta = [1,5]$. Αν $f(3) = 0$ να δείξετε ότι:
α) $f(1) > 0$ και $f(5) < 0$ **β)** Η εξίσωση $f(2x+3) = x$ έχει μοναδική ρίζα.



- Εργασία 4^η:** 1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x - \eta\mu a = \frac{\pi}{2} - x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Έστω f, g συνεχείς στο $[a, b]$ ώστε $f(a)+f(b)=g(a)+g(b)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\rho \in [a, b]$ ώστε $f(\rho)=g(\rho)$.
3. Έστω f συνεχής στο $[0,1]$ με $0 \leq f(x) \leq 2$ για κάθε $x \in [0,1]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) - 2f(x) + 3x = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $[0,1]$.
4. Δύο συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο Δ και για κάθε x ισχύει $f(x) - g(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}$. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες $\rho_1, \rho_2 \in \Delta$, να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$.
5. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ώστε $f(\eta\mu \xi) = f(\sigma\upsilon\nu \xi)$.
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$. Αν $5a + 3b + 3\gamma = 0$ να δείξετε ότι:
α) $f(0) + f(1) + f(2) = 0$ β) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0, 2]$.

- Εργασία 5^η:** 1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x = a\eta\mu x + b$, $(a, b > 0)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα θετική που δεν υπερβαίνει το $a+b$.
2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{20} + a^{12}x^8 = a^{20}$, $a < 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 > a$.
3. Αν $\lambda > 0$ και $\mu + \lambda + 1 < 0$ να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + \mu x^2 + \lambda = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1, 1)$.
4. Να δείξετε ότι η $\frac{1}{x-\alpha} + \frac{2}{x-\beta} + \frac{3}{x-\gamma} = 0$ με $\alpha < \beta < \gamma$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $[a, \gamma]$.

(*)Εργασία 6^η: 1. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$x^2 f(x) + \eta\mu x = x f(x) + \sqrt{x} \cdot \eta\mu x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(1)$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $4f(\xi) = 3\xi$.

2. Δίνεται συνάρτηση $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως αύξουσα, η οποία έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1, 3)$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1) < 0$ και $f(3) > 0$,

β) η εξίσωση: $(x-1)f(x-2) = (x-3)f(x+2)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 3)$.