



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (3)

ΕΝΟΤΗΤΑ: «ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ Θ. ΒΟΛΖΑΝΟ - ΠΡΟΣΗΜΟ ΚΑΙ ΤΥΠΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ»

Εργασία 1^η:

1. Να βρείτε το πρόσημο των: α) $f(x)=x^3+3x^2-4x-12$. β) Ομοίως της $g(x)=4x^3-3x-1$
2. Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g με $[f(x)-g(x)]g(x)-3>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι οι f και g διατηρούν σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.
3. α) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $5f^2(x)-3f(x)=2x^2-x+5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.
β) Ομοίως αν $f^3(x)+f(x)=x^2+1$.
4. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις f, g στο διάστημα Δ με $f(x)\neq g(x)$, για κάθε x . Αν $\alpha, \beta\in\Delta$ με $\alpha\neq\beta$, να δείξετε ότι $f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)>f(\alpha)g(\beta)+f(\beta)g(\alpha)$.

Εργασία 2^η:

1. Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f^2(x)-2xf(x)=9$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=3$.
2. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, με $f(x)\neq 0$ για την οποία ισχύει $f^2(x)=x^4+2x^2-4f(x)-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε: α) Το $f(1)$ β) Τον τύπο της.

Εργασία 3^η:

1. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\Delta=[1,4]$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$. Αν $f(5/2)>0$ και $f(1)f(2)=f(3)f(4)$, να δείξετε ότι:
α) υπάρχει $\xi_1\in[1,2]$ ώστε $f^2(\xi_1)=f(1)f(2)$ β) Η f δεν αντιστρέφεται.
2. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ ώστε $f^2(x)-1=2xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η $g(x)=f(x)-x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.
β) Αν $f(0)=1$ να βρείτε τον τύπο της f .
γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x\rightarrow-\infty} (xf(x))$.

Εργασία 4^η:

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{-x^2-2x+24}-x$.
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$
γ) Να βρείτε το πρόσημό της.
2. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ με $f(x)\neq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επίσης η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(3,2)$. Να αποδείξετε ότι:
α) $f(x)<x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, β) υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $\xi f(\xi)=1$.



Εργασία 5^η: 1. Έστω f συνεχής συνάρτηση με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(1)=2020$, να βρείτε τα

$$\text{όρια: } A = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(2)+1]x^3 + 3x^2 - 5x - 4 \quad \text{και} \quad B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[f(4)+2]x^3 + 2x - 5}{x^2 + x - 7}$$

2. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $x^3(1 - f(x)) = x^2 + 2x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(-1, 2)$

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(0)x^5 - 3x^2 + 1}{f(1)x^2 - 2x + 5}$

3. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x)}{\sqrt{x+3}-2} = 8$$

Να βρείτε: α) την τιμή $f(1)$ β) το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(2)x^3 - 2x^2 + 3x - 5]$.

4. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f^2(x) - 6f(x) + 5 = x^4 + 4x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

α) την τιμή $f(1)$, β) τον τύπο της f , γ) το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$

(*) Εργασία 6^η: 1. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, για την οποία

$$\text{ισχύει: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - f(x)}{\sqrt{x+3}-2} = 8$$

α) Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf(x) = 9 - x^2$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 3)$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-f(x)x^3 + 2x - 3)$.

2. Δίνεται συνεχής συνάρτηση: $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x^2 + f^2(x) = 4$ για κάθε $x \in [-2, 2]$ και επιπλέον η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y στο σημείο με τεταγμένη 2.

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-2, 2)$.

γ) Να βρείτε τον τύπο της f .

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{\eta\mu x \cdot \eta\mu 3x}$