



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (4)

ΕΝΟΤΗΤΑ: «ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ - ΜΕΓΙΣΤΗΣ Κ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ - ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ»

- Εργασία 1^η:** 1. Έστω $f(x)=x^8+x+4$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ ώστε $f(\xi)=250$.
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3}{16}-\eta\mu(\pi x)+7$. Να εξετάσετε αν υπάρχει $\xi \in [-4,4]$, ώστε $f(\xi) = 7/2$
3. α) Έστω $f(x)=x^2+\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)+1$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $f(\xi)=2$.
- β) Έστω $f(x)=x^2+\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)+1$. Να δείξετε ότι για κάθε $\beta \in [1,3]$ υπάρχει $\xi \in [0,1]$ ώστε $f(\xi)=\beta$.
4. Έστω f συνεχής με $f(4)=3$ και $f(x) \cdot f(f(x))=1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- α) Να βρείτε το $f(3)$. β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\xi)=2$. γ) Να βρείτε το $f(2)$.

- Εργασία 2^η:** 1. Αν η συνάρτηση f είναι αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $[0,1]$, $f(0)=2$ και $f(1)=4$.
- α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=3$ τέμνει την f σε ένα ακριβώς σημείο στο $(0,1)$.

β) Υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$

2. Έστω f συνεχής και αύξουσα στο $[2,10]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,10)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{3f(3) + 5f(6) + 2f(8)}{10}$

3. Έστω $f : [1,8] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $\frac{6x^2 - 6x}{x^2 - 1} \leq f(x) \leq \frac{6\sqrt{x} - 6}{x - 1}$ και $f(1) \cdot f(8) = 27$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=7$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(1,8)$.

4. Έστω f συνεχής στο $[a,b]$ με $f(x) \geq 0$. Να δείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $x_1, x_2, \xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = \sqrt{f(x_1) \cdot f(x_2)}$.

- Εργασία 3^η:** 1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{5-x} - \sqrt{x+3}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
2. Να βρείτε το σύνολο τιμών $f(\Delta)$ της συνάρτησης $f(x) = e^{-x} - 2x + 1$ με $\Delta = [0,1]$.
3. Ομοίως της συνάρτησης $f(x) = x^2 + \ln(x-1)$ με $\Delta = (1,2)$.

- Εργασία 4^η:** 1. Δίνεται η συνεχής και αύξουσα συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} [f^2(x) - 4f(x)] = -4$ και η C_f τέμνει τον y' στο -1 . Να βρείτε το σύνολο τιμών της.



2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=5-\sqrt{x-1}-\ln x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\ln(2-x)-x^2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Εργασία 5^η: 1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^{2019}+x^3+1=0$ έχει μία μόνο ρίζα.

2. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $\Delta=[0,5]$ και γνησίως μονότονη στα διαστήματα $[0,2]$, $[2,4]$, $[4,5]$. Αν $f(0)=1$, $f(2)=-2$, $f(4)=3$ και $f(5)=-4$ να βρείτε:

α) Την μονοτονία της f . β) Το σύνολο τιμών της. γ) Το πλήθος των ριζών της στο Δ .

3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2\ln x+3e^x=0$ έχει ρίζα στο $(0, 1)$.

4. Αν η $f(x)=x-\eta\mu x-1$ είναι αύξουσα στο $[-\pi/2, \pi]$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x-\sin^2 x=\eta\mu x(1+\eta\mu x)$ έχει μία μόνο ρίζα στο $(-\pi/2, \pi)$.

5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=4x^2+3\eta\mu x-1$, $x\in[0, \pi/2]$. Να δείξετε ότι:

α) Η f είναι αύξουσα. β) Να βρείτε το σύνολο τιμών.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $3\eta\mu x=1-4x^2$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(0, \pi/2)$.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0, \pi/2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=7/5$.

6. Έστω η $f(x)=x+\sin x-4$, $x\in(\pi, 2\pi)$.

α) Να δείξετε ότι είναι αύξουσα. β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sin x=4-x$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(\pi, 2\pi)$.

Εργασία 6^η: 1. Έστω η $f(x)=\ln x+e^{x-1}-1$

α) Να δείξετε ότι είναι αύξουσα. β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln x+e^{x-1}=1$.

2. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=e^x+\ln x+x-1$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της. β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=5$ έχει μία μόνο λύση.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=e$.

3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e-e^x)=x$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

4. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f για την οποία $f(0)=-4$ και $\lim_{x\rightarrow+\infty} \frac{f(x)}{x}=3$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x-2$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.