



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (5)

ΕΝΟΤΗΤΑ: «ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ»

Εργασία 1^η: 1. Αν για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν: $f(x^3) + x^2 \cdot f(x) \geq 2x^3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = L, \quad L \in \mathbb{R} \quad \text{να βρείτε την τιμή του } L.$$

2. Για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Αν $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a^2$, να βρεθεί ο $a > 0$ όταν: $\lim_{x \rightarrow 2a} f(x) = a + 3$.

3. Για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $f^2(x) + 2 \cdot x \cdot \eta\mu x \leq \eta\mu^2 x + 2 \cdot x \cdot f(x)$, κοντά στο 0. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις g, h για τις οποίες ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2g(x) - 4}{x - 2} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{h(x)} = 1$.

α. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.

β. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ αν για την f ισχύει:

$$g(x) \leq f(x) + |x - 2| + \frac{\eta\mu(x - 2)}{(x - 2)} \leq h(x) + 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{2\}.$$

Εργασία 2^η: 1. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = (2018)^x + x - 2019$.

A. Να μελετήσετε την μονοτονία και το πρόσημο της f . B. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x + 1}{(2018)^x + x - 2019}$

2. Έστω f, g συναρτήσεις τέτοιες ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει: $0 < g(x) < f(x)$.

Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x)} = 0$, να δείξετε ότι:

$$\text{A. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad \text{B. } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \quad \text{και} \quad \text{Γ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + g^2(x)}{f^2(x) + g^2(x) + f^2(x) \cdot g^2(x)} = 0$$

Εργασία 3^η: 1. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \sqrt{x^2 + 1}] = 2018$, να βρεθούν:

$$\text{α. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{και} \quad \text{β. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) + 2019x^3}{2 \cdot f^2(x) + x^3}$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 2018$. Να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2018 \cdot \eta\mu x] = 0$

3. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) + 2xf(x)}{x^2} = -1$, να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$



Εργασία 4^η: 1. Αν για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $f^2(x) + 4 \cdot f(x) + 4 \cdot \sin^2 x \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

2. Αν για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $f^2(x) + g^2(x) + 1 \leq x^{2019} - 2f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι f, g είναι συνεχείς στο 0.

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στη θέση $x = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot f(x) + \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{4}\right)}{(x-2)^2} = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, να βρεθεί η τιμή $f(2)$.

4. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + 2f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A) Να δείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} και να βρείτε τον τύπο της.

B) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ Δ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

Εργασία 5^η: 1. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ συνεχής στο $\mathbb{R}$, με $f(1) = 2006$.

i. Να δείξετε ότι $f(x) > 0, x \in \mathbb{R}$ ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[f(2007) + 1]x^3 + 2x - 7}{[f(2008) + 2]x^2 - 3x + 2006}$

iii. Αν $f(0) = \ln 2$ να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = e^\xi$.

2. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 3$

και $\eta \mu 2x \leq xf(x) \leq 2x$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $\epsilon: 2x + y - 3 = 0$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(0, 1)$.

3. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$ και $f(a) + f(b) + f(\gamma) = 0, a < b < \gamma, a, b, \gamma \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

4. Έστω συνεχής συνάρτηση f στο $[1, 4]$ για την οποία ισχύουν:

➤ $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$.

➤ $f(1) > 0$

➤ $f(1)f(2) = f(3)f(4)$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$,

β) Η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - f(1)f(2)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[1, 2]$.

γ) Η συνάρτηση f δεν είναι αντιστρέψιμη