



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ: «ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE»

ΕΡΓΑΣΙΑ 1^η (Εφαρμογή του Θ. Rolle - γεωμετρική ερμηνεία)

1. Αν $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta & , x < 0 \\ 3 + (\gamma - \alpha)x & , x \geq 0 \end{cases}$ να βρεθούν οι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[-1, 1]$. Στη συνέχεια να βρεθεί η οριζόντια εφαπτομένη της C_f .
2. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο το πολύ σημεία.
3. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι:
 - α) για την συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x - c}$, $c \notin [\alpha, \beta]$ υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0$.
 - β) υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $A(c, 0)$.
4. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

ΕΡΓΑΣΙΑ 2^η (Υπαρξη τουλάχιστον 1 ρίζας εξίσωσης – χρήση αρχικής συνάρτησης - ομάδα Α)

1. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ έτσι ώστε $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + f(0)$.
Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έτσι ώστε: $f'(x_0) = \sin x_0$.
2. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\frac{\alpha}{5} + \frac{\beta}{3} + \gamma = 0$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
3. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-2, 2]$ με $f(1) = 0$ και $g(x) = f(x)(x^2 - 4)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-2, 2)$ τέτοιο ώστε $g''(x_0) = 0$.
4. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow (0, +\infty)$ δίνεται ότι $\ln f(\beta) - \ln f(\alpha) = \beta - \alpha$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = f(\xi)$.

**ΕΡΓΑΣΙΑ 3^η** (Υπαρξη τουλάχιστον 1 ρίζας εξίσωσης – χρήση αρχικής συνάρτησης - ομάδα Β)

1. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ έτσι ώστε να ισχύει $f(1) - f(e) = \frac{1}{e}$ (1). Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $x_0^2 f'(x_0) + 1 - \ln x_0 = 0$ (2).
2. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = f(\xi) \cdot g'(\xi)$.
3. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, e]$ και ισχύει $f(1) = 1$,
 $f(2) = 4 - \ln 2$, $f(e) = e^2 - 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = \frac{1}{\xi^2} + 2$.
4. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \sin \xi = 0$.

ΕΡΓΑΣΙΑ 3^η (Υπαρξη τουλάχιστον 1 ρίζας εξίσωσης – χρήση αρχικής συνάρτησης - ομάδα Γ)

1. Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\frac{f(2019)}{f(2018)} = e$.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(2018, 2019)$.
2. Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\beta) = 0$. Να δείξετε ότι
υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\xi)}{\alpha - \xi}$.
3. Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) για
την οποία ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:
 $(\xi - c)f'(\xi) = f(\xi)$, όπου ο πραγματικός $c \notin [\alpha, \beta]$.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ($\alpha > 0$), συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο
 (α, β) για την οποία ισχύει $\alpha^v f(\alpha) - \beta^v f(\beta) = 0$.
Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει: $\xi f'(\xi) = -v f(\xi)$.