



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ: «ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ»

Εργασία 1^η :

1. Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα που δίνεται και να βρείτε την τιμή του ξ για την οποία ισχύει το συμπέρασμα.

α. $f(x) = x \ln x, [1, e]$ β. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x, & x \geq 0 \\ x^3 + x, & x < 0 \end{cases}, [-1, 1]$ γ. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 4, & x > 1 \\ 3x^2 - 5x + 5, & x \leq 1 \end{cases}, [-1, 1]$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 5, & x < 1 \\ \beta x^2 - 5x + 6, & x \geq 1 \end{cases}$. Να βρείτε τους $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να ικανοποιεί στο $[0, 3]$ τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. και να βρείτε την τιμή του ξ για την οποία ισχύει το συμπέρασμα.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 1 \\ \frac{2x^2 + ax - 1}{x - 1}, & x > 1 \end{cases}$. Να βρεθεί ο $a \in \mathbb{R}$ ώστε η f να ικανοποιεί στο $[0, 2]$

τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. και να βρείτε την τιμή του $\xi \in (0, 2)$ ώστε να ισχύει $f(2) - f(0) = 2f'(\xi)$.

4. Έστω συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{1-x} + x, & x < 0 \\ \beta \cdot \eta \mu ax + 2, & x \geq 0 \end{cases}, a, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν:

α. οι τιμές των μεταβλητών a, β ώστε να εφαρμόζεται το Θ. Μ. Τ. στο διάστημα $[-3, 3]$.

β. $\xi \in (-3, 3)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(3) - f(-3)}{6}$.

Εργασία 2^η :

1. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη. Αν $3f(5) + f(1) = 0$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 5)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = f(5)$.

2. Δίνεται συνάρτηση f με $f(x) = (x+1)(ax^2 + \beta)$, $a \neq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει $a^2 + \beta^2 + a\beta + a + \beta = \frac{1-\beta}{a}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f να είναι κάθετη στην ευθεία $y = -x$.

3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) . Αν $f(a) = a(a+\beta)$ και $f(\beta) = \beta(a+\beta)$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, να είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): (a+\beta)x - y + a\beta = 0$.

Εργασία 3^η :

1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.
Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f(a)}{f(\beta)} = e^{(a-\beta)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}$.
2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$, $a > 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$.
Η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{1}{\xi}$.
3. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(4) = f(1) + 3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (1, 4)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον άξονα $x'x$.
4. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\alpha) = 2\beta + 6\alpha$ και $f(\beta) = 5\beta + 3\alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 3$.

Εργασία 4^η :

1. Έστω μια συνάρτηση $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα. Αν η f έχει σύνολο τιμών το $[0, 2]$ και είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$, να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = -2$.
2. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0, 5]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 5)$ και ισχύει $f(5) = f(0) + 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 5)$ τέτοια ώστε $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 1$.
3. Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[\alpha, \beta]$ να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $3f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) = 0$.
4. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(3x) = 3f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Αν $f(1) = 3$ δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in (0, 3)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) + f'(x_3) = 9$.
5. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ και $f(4) = 3$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δυο τουλάχιστον $\xi_1, \xi_2 \in (1, 4)$ διαφορετικά μεταξύ τους, ώστε οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία $A(\xi_1, f(\xi_1))$ και $B(\xi_2, f(\xi_2))$ να είναι μεταξύ τους κάθετες.

Εργασία 5^η: (Θ.Μ.Τ. & Θ. Bolzano), (Θ.Μ.Τ. & Θ.Ε.Τ.)

1. Δίνεται συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f(\alpha) = 2\beta$ και $f(\beta) = 2\alpha$. Να αποδείξετε ότι:
 - i. Η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β)
 - ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 4$.
2. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, 2\alpha] \rightarrow \mathbb{R}$, με $\alpha > 0$ για την οποία ισχύει $f(\alpha) = \alpha$ και $f(2\alpha) = 2\alpha$. Να αποδείξετε ότι:
 - i. Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, 2\alpha)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 3\alpha - x_0$
 - ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, 2\alpha)$ διαφορετικά μεταξύ τους τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$.
3. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(1) = 2$ και $f(3) = 8$. Να αποδείξετε ότι:
 - i. Υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 6$
 - ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 3)$ διαφορετικά μεταξύ τους τέτοια ώστε $\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 1$.
4. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(1) = 2$ και $f(3) = 6$. Να αποδείξετε ότι:
 - i. Υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 8 - 2x_0$
 - ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 3)$ διαφορετικά μεταξύ τους τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 4$.

Εργασία 6^η: (Θ.Μ.Τ. & Θ. Rolle – Ύπαρξη ρίζας $f''(\xi)$, πρόσημο $f'(\xi)$ και $f''(\xi)$)

1. Η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$, $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$ με $\alpha < \beta < \gamma$ είναι συνευθειακά, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \gamma)$ ώστε να είναι $f''(\xi) = 0$.
2. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(1) = \alpha + 2\beta$, $f(2) = 2\alpha + 3\beta$ και $f(3) = 3\alpha + 4\beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$, ώστε $f''(\xi) = 0$.
3. Έστω μια συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(-1) = f(1) = 1$ και $f(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\xi, f'(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): 2x - y + 2019 = 0$
4. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$, $B(2, -4)$, $\Gamma(3, 2)$. Να αποδείξετε ότι:
 - i. υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 3)$, ώστε: $f(x_1) = f(x_2) = 0$.
 - ii. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$, ώστε $f''(\xi) > 0$.

Εργασία 7^η: (ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ)

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,5]$ με $f(1)=3$ και $0 \leq f'(x) \leq 5$ για κάθε $x \in (1,5)$ να δειχθεί ότι ισχύει η ανισότητα $3 \leq f(5) \leq 23$.

2. i. Να αποδείξετε ότι: $\left| \frac{x^2 + \eta \mu x}{2x^2 + 2} \right| \leq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Αν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = \frac{x^2 + \eta \mu x}{2x^2 + 2}$, να αποδείξετε ότι

για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $|f(\beta) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |\beta - \alpha|$.

3. Να αποδείξετε τις ανισώσεις:

α. $\frac{\beta - a}{\beta} < \ln \frac{\beta}{a} < \frac{\beta - a}{a}$, $0 < a < \beta$

β. $\frac{a - \beta}{e^a} < \frac{e^a - e^\beta}{e^{a+\beta}} < \frac{a - \beta}{e^\beta}$, $a < \beta$

γ. $a < \frac{e^{2a} - 1}{2} < ae^{2a}$, $a \in (0, 1)$

δ. $\frac{1}{x+1} < \ln \frac{x+1}{x} < \frac{1}{x}$, $x > 0$

ε. $ae < \left(\frac{\beta^\beta}{a^a} \right)^{\frac{1}{\beta-a}} < be$,
 $0 < a < \beta$

στ. $x+1 \leq e^x \leq xe^x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:
 $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$.

5. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

6. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Αν ισχύει $f(0) = 0$ να δείξετε ότι $f'(x) < \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x > 0$.

Συνδυαστικό θέμα

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $2f(x) - 2x \leq f(4) + f(-4)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- $f(4) - f(-4) = 8$
- υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (-4, 4)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y = x + 2020$
- υπάρχει $x_0 \in (-4, 4)$ ώστε $f(x_0) = f(-4) + 4$
- υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-4, 4)$, ώστε $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$.