



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ: «Τοπικά ακρότατα - Θεώρημα Fermat»

ΕΡΓΑΣΙΑ 1^η (ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ)

1. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = ax^3 - bx^2 + 2x$, να παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$.
2. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = a \ln(x-1) - bx^2 - 4x + 1$, να παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία $x_1 = 2$ και $x_2 = 3$.
3. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx$, να παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$ το $f(1) = -1$.

ΕΡΓΑΣΙΑ 2^η (Η f ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΑΚΡΟΤΑΤΑ)

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2}{e^x}$ δεν έχει ακρότατα.
2. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
 $f^3(x) + 3f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $\alpha^2 < 2\beta$, να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

ΕΡΓΑΣΙΑ 3^η (ΑΝΙΣΟΪΣΟΤΗΤΑ $\rightarrow$ FERMAT)

1. Για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι : $\alpha \ln x - x^2 \leq x - 2$ για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$.
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$, όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$. Αν $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.
3. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :
 $\ln(x^2 + 1) \geq f(x) - e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο σημείο της $A(0,1)$.
4. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :
 $(1 + e^{1-x})f(x) + \sin \pi x \geq 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο σημείο της $A(1,2)$.
5. Αν για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 - \ln x$, ισχύει $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x > 0$, να βρείτε το α .

**ΕΡΓΑΣΙΑ 4^η** (ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΣ ΑΚΡΟΤΑΤΟΥ ΣΤΑ ΑΚΡΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ)

1. Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, μια συνάρτηση, με $A = [1,2]$ και $f(A) = [-2,5]$. Αν επιπλέον ισχύει $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.
2. Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, μια συνάρτηση, με $A = [0,1]$ και $f(A) = [-1,3]$. Αν επιπλέον ισχύει $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

ΕΡΓΑΣΙΑ 5^η (ΕΥΡΕΣΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ - ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ)

1. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x) = -x^2 + 6x + 1$ ii. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 1$ iii. $f(x) = x^3 - x^2$
iv. $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$ v. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-1}$ vi. $f(x) = \frac{x^2-7x+6}{x-10}$

2. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ ii. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$ iii. $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$
iv. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 5$ v. $f(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 5$

3. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$ ii. $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 7)$ iii. $f(x) = e^x - ex$ iv. $f(x) = \ln x - x$
v. $f(x) = x \ln x$ vi. $f(x) = \ln(8x - x^2)$ vii. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$ viii. $f(x) = \frac{x}{e^x}$

4. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x - x + 1$.

- i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της g
- ii. Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{e^x} + x$ να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$ και ότι δεν υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη στη καμπύλη της f .

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

6. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο αντίστοιχο διάστημα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x) = x^3 - 12x + 7$ στο $[0,3]$ ii. $f(x) = \ln x - x$ στο $[1,e]$
iii. $f(x) = \sqrt{6x - x^2}$ vi. $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ v. $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$



7. Δίνετε η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + \lambda$, $x, \lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ , αν είναι γνωστό ότι το τοπικό ελάχιστο της f είναι αντίθετο από το τοπικό της μέγιστο.
8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + \lambda$, $x, \lambda \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου λ , αν είναι γνωστό ότι το τοπικό μέγιστο της f είναι τριπλάσιο από το τοπικό ελάχιστο.
9. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6\alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = -2$ και είναι $f(-2) = 98$.
- Να αποδείξετε ότι $\alpha = -6$ και $\beta = 54$
 - Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 2)$
10. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.
- Να βρείτε το ελάχιστο της g
 - Για τη συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x}$ να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ και ότι η f δεν έχει ακρότατα.

ΕΡΓΑΣΙΑ 6^η (ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ)

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης :

- i. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 3, & x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 7, & x > 1 \end{cases}$ ii. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 3, & x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 7, & x > 1 \end{cases}$
- iii. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & x \leq 3 \\ x^2 - 8x + 22, & x > 3 \end{cases}$ iv. $f(x) = x^3 - 3x|x|$

ΕΡΓΑΣΙΑ 7^η (ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΚΑΙ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ)

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - 2x + e$
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - 2xe^{2x} - 1$
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$



3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - x + 1$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
- Αν ισχύει $f(\alpha + \beta) = -f(3\alpha + 4\beta)$, να βρείτε τα α, β .

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) - x$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

ΕΡΓΑΣΙΑ 8^η (ΠΡΟΣΗΜΟ ΑΚΡΟΤΑΤΟΥ ΚΑΙ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΗΣ f)

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x+1} - 2x - 3$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα και να βρείτε το πρόσημο της.
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 2e^{x+1} - x^2 - 3x$ είναι γνησίως αύξουσα.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - ex$. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα και να βρείτε τις ρίζες f και το πρόσημο της. Στη συνέχεια να μελετήσετε τη $g(x) = 2e^{x-1} - x^2$ ως προς τη μονοτονία.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x - 1$. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα και να βρείτε τις ρίζες f και το πρόσημο της.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x - 2x + 1$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 2x \ln x - x^2 - x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

5. i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$ και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της.

ii. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $\phi(x) = 2e^x + x^2 - 2x$ και να βρείτε το πρόσημο της.

iii. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = e^x - 1$ και $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν κοινή εφαπτόμενη.