



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ: «Μονοτονία συνάρτησης ΙΙ»

Εργασία 1^η: (υπολογισμός παραμέτρων)

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + 3\alpha x^2 + 6x - 4$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^3 + 3(\alpha - 5)x^2 + 6(\alpha - 8)x - 13$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η f είναι γνησίως f φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\alpha - 1)x^3 + 6x^2 + 3(\alpha + 2)x - 7$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
4. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η συνάρτηση $f(x) = 2\ln(x^2 + \alpha^2) + 2\alpha x + 3$, να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Εργασία 2^η: (Επίλυση εξισώσεων)

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

- 1) $e^x = 1 - 2x$, 2) $3x^2 + 2x = 5 - \ln x$, 3) $e^{x-1} + x = 3 - x^3$, 4) $(x^2 + 3x + 4) \cdot e^x = 4$
- 5) $e^x = e^{-x}(1 - x)$, 6) $2^x + 5^x = 7^x$, 7) $\ln x = x - 1$, 8) $1 + x \cdot \ln x = x$, 9) $x \cdot \ln x = 2x - e$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 3\sigma\phi x - 4x + \pi - 3$.

Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3$. **α)** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

β) Να λύσετε τις εξισώσεις: **1)** $1 + x^3 \cdot e^{-x} = e^{-x}$, **2)** $e^{x^3-6} - e^{7x} = (7x)^3 - (x^3 - 6)^3$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e}{x} - \ln x$. **α)** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

β) Να λύσετε τις εξισώσεις: **1)** $e = x \cdot \ln x$, **2)** $\frac{e}{|x|+3} - \frac{e}{2|x|+1} = \ln\left(\frac{|x|+3}{2|x|+1}\right)$.

5. α) Να μελετήσετε την συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - x$, με $0 < \alpha < 1$ ως προς την μονοτονία.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την ισότητα: $\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} = \lambda^2 - \lambda - 2$, όπου $0 < \alpha < 1$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$. α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{e^{x+\sin x}}{x^2 + 2x \cdot \sin x + \sin^2 x + 1} = \frac{e}{2}$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4^x + \ln x$, $x > 0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\ln\left(\frac{4^x + 4}{2^{x+2} + 1}\right) = (2^{x+2} + 1)^4 - (4^x + 4)^4$

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f(x^3) = f(x^2) + f(x^4)$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$. α) Να μελετήσετε την f ως προς την

μονοτονία. β) Να λύσετε την εξίσωση: $2 \cdot (x^2 - 3x + 2) = \ln\left(\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1}\right)$.

Εργασία 3^η: (Υπαρξη μοναδικής ρίζας).

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $x^2 + 2x \cdot \ln x = 2x$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 - 1$ και $g(x) = \eta\mu^2 x - x$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν μοναδικό κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, \pi)$.

3. α) Να δείξετε ότι: $e^x - x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $2e^x + 2x = x^2 + 2$, έχει ακριβώς μία ρίζα.

4. α) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) > 0$ και $g'(x) < 0$, να δείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

β) Αν $f(x) = e^x + 2x$ και $g(x) = e^{-x} - x^3$, να δείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν μόνο ένα κοινό σημείο.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x \cdot f''(x) = 4x - f'(x)$, για κάθε $x > 0$. και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y = 3x - 5$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$. β) Να βρείτε τον τύπο της f .

γ) Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, e)$.

6. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν $f(-1) = 0$, $f(2) = -1$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: α) η f είναι γνησίως φθίνουσα,

β) υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 1)$, ώστε: $\frac{f(\xi)}{\xi - 1} = e^\xi$.