



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ: «Μονοτονία συνάρτησης ΙΙΙ»

Εργασία 1^η: (Επίλυση ανισώσεων)1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x + 3x^5 - 2$.α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. β) Να λύσετε την ανίσωση: $2e^x + 3x^5 < 2$ γ) Να λύσετε την ανίσωση: $2e^{x^2-2x} - 2e^{3x-6} > 3(3x-6)^5 - 3(x^2-2x)^5$ 2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^7 - 1$.α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. β) Να λύσετε την ανίσωση: $e^x > -x^7 + 1$ γ) Να λύσετε την ανίσωση: $e^{2x^2-3} - e^{x^2+2x} < (x^2+2x)^7 - (2x^2-3)^7$ 3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha^x + \beta^x \cdot x^3}{\beta^x}$, με $\alpha > \beta > 0$.α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.β) Να λύσετε την ανίσωση: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{x^2} - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2-3x} < (3x-2)^3 - x^6$ 4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - x$.α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.β) Να λύσετε τις ανισώσεις: 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq x+6$, 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+3x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+10} > x^2+3x-10$.

5. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $e^{x-1} \leq 1 - \ln x$, β) $e^x + 2x < e^{-x} - x^3$, γ) $x^2 + 4x > \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$, δ) $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \geq x$ ε) $2^x + 3^x < 5^x$, στ) $\frac{x+5}{x+2} - \ln x \leq 2$, ζ) $1 + \ln x < \frac{4-2x^2}{x+1}$, η) $\ln(x^2+1) + e^x \geq 1-x$ 6. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ όπου: $f^3(x) + f(x) = e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.β) Να λύσετε την ανίσωση: $f(2^x + x) - f(4 - x^3) < f\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) - 1$.7. Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει: $f(0) = g(0) = 0$ και $f'(x) = 2xe^{-f(x)}$ και $e^x \cdot g'(x) = e^x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.α) Να βρείτε τους τύπους των f και g . β) Να μελετήσετε την συνάρτηση $h(x) = f(x) + g(x)$ ωςπρος την μονοτονία και γ) Να λύσετε την ανίσωση: $e^x \left[\ln(x^2+1) + x + 1 \right] \geq 1$

Εργασία 2^η: (απόδειξη ανισώσεων)**1.** Να αποδείξετε ότι:

1) $\frac{2(x-1)}{x+1} < \ln x$, με $x > 1$, **2)** $e^{x-1} > 1 + \ln x$, με $x > 1$, **3)** $x^3 + x + \sin x \geq 1$, με $x \geq 0$,

4) $x^2 - 2x \cdot \eta\mu x \geq 2\sigma\upsilon\nu x - 2$, με $x \in \mathbb{R}$, **5)** $e \cdot \ln x \leq x$, με $x > 0$, **6)** $x^2 - 1 \geq 2 \cdot \ln x$, με $x \geq 0$

7) $2e^x \geq e(x^2 + 1)$, με $x \geq 1$, **8)** $4x - x^2 - 3 \leq 2\ln x \leq 2x - 2$, με $x \geq 1$.

2. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει: $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1)$.**β)** Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση: $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$, με $x > 0$.**3.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x - x^2$.**α)** Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την f .**β)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f(e^x) < f\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$.**4. α)** Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση: $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ **β)** Να αποδείξετε ότι: $x^x \geq e^{x-1}$, για κάθε $x > 0$.**5. α)** Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, με $x > 0$.**β)** Να αποδείξετε ότι: **1)** $e^\pi > \pi^e$, **2)** $e^x \geq x^e$, για κάθε $x > 0$, **3)** $\alpha^{\alpha+1} > (\alpha+1)^\alpha$, με $\alpha > e$.**6.** Να αποδείξετε τις ανισώσεις: **1)** $\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) < e^\beta - e^\alpha$, $0 < \alpha < \beta$, **2)** $\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta} > \frac{\alpha}{\beta}$, $0 < \alpha < \beta < \pi$ **3)** $\ln\alpha - \ln\beta > \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta}$, $0 < \alpha < \beta$, **4)** $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\ln\alpha}{\ln\beta}$, $\beta > \alpha > e$, **5)** $e^{\alpha-1} - e^{\beta-1} < \alpha - \beta$, $1 < \alpha < \beta$ **7.** Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = 0$ και $x \cdot f'(x) - 2\ln x > 0$, για κάθε $x > 0$.Να δείξετε ότι : $f(x) > \ln^2 x$, για κάθε $x > 1$.**8.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = 1$ και $x \cdot f'(x) > 2x^2 + 1$ για κάθε $x > 0$. **α)** Να αποδείξετε ότι: $f(x) > x^2 + \ln x$, για κάθε $x > 1$.**β)** Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) - x^2 = \ln x$ και **γ)** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.