



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ: «Μονοτονία συνάρτησης IV – Γενικά Θέματα»

ΕΡΓΑΣΙΑ 1^η

A. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $f(x) \geq f'(1) \cdot (x-1) + f(1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B. Έστω η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Γ. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(0) = 6$ και:

$$f'(x) - f(x) = e^x \cdot (2x - 4), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

1) Να βρείτε τον τύπο της f .

2) Αν $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι: $2 \cdot f(x) < f(x+\alpha) + f(x-\alpha)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΕΡΓΑΣΙΑ 2^η

A. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(1) = e$ και: $f'(x) - 2xf(x) = e^{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1) Να βρείτε τον τύπο της f .

2) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

3) Να λύσετε την ανίσωση: $e^{x-1+2\ln x - \ln^2 x} \leq \frac{1 - \ln x}{\sqrt{x}}$.

B. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν: $f\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$,

$$f(2020) > 2020 \text{ και } f^2(x) - 2x \cdot f(x) = \ln(x \cdot e^{-x}) \cdot \ln(x \cdot e^x), \text{ για κάθε } x > 0.$$

1) Να βρείτε τον τύπο της f .

2) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

3) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln\left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2}\right) \geq 1$.

Γ. 1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot (x+1)$. Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.

2) Δίνεται η συνάρτηση $G(x) = \alpha \cdot \left(e^\alpha - e^{\frac{\alpha+x}{2}}\right) + x \cdot \left(e^x - e^{\frac{\alpha+x}{2}}\right)$, με $x > \alpha \geq -2$

i) Να δείξετε ότι: $G'(x) = f(x) - f\left(\frac{\alpha+x}{2}\right)$

ii) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha \cdot e^\alpha + \beta \cdot e^\beta}{\alpha + \beta} > e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$, για κάθε $-2 \leq \alpha < \beta$.

ΕΡΓΑΣΙΑ 3^η

A. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{f(x) - x^2 + 2x - 3}{x - 3} \right) = -4$

1) Να βρείτε τις τιμές $f(3)$ και $f'(3)$.

2) Αν επιπλέον η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in (1, 3)$ ισχύει:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x-h) - f'(x)}{h} \right) > 0, \text{ να αποδείξετε ότι: } f(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in [1, 3).$$

B. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει

$$f''(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Επίσης ισχύουν: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cdot f(x) - \eta\mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 4} - 2} \right) = -4 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x^2) - f(x)}{x - 1} \right) < 0.$$

1) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$.

2) Να αποδείξετε ότι: $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Γ. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - \sqrt{x+3} + 2}{x^2 - 1} \right) = \frac{3}{8}.$$

1) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$.

2) Να λύσετε την εξίσωση: $f(e^x - e^{-x} + 1 - \eta\mu 2x) = 0$

3) Αν επιπλέον η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα,

β) να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f(\eta\mu\theta) \cdot x^7 - 3x^2 + 2}{f\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right) \cdot x^4 - 5x + 7} \right)$ όπου $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

γ) να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x^2 - 3)}{x^2 - 3x + 2} \right)$

δ) να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x} \right)$