



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ: «ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ Θ.Μ.Τ. - ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ - ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ»

Εργασία 1^η: (Σταθερή Συνάρτηση)

- Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(4) = 3$ και : $xf'(x) = 3x - 2f(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
 - Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 f(x) - x^3$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.
 - Να βρείτε τον τύπο της f .
- Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει : $\frac{f'(x)}{2} = \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x > 0$.
 - Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, $x > 0$, είναι σταθερή.
 - Αν $f(1) = 2$ να βρείτε τον τύπο της f .
- Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(4) = 4e^{-2}$ και : $2\sqrt{x} \cdot f'(x) + f(x) = e^{-\sqrt{x}}$ για κάθε $x \geq 0$.
 - Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot f(x) - \sqrt{x}$ είναι σταθερή στο $[0, +\infty)$.
 - Να βρείτε τον τύπο της f .
- Δίνεται συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $|e^{f(x)} - e^{f(y)} - \ln x + \ln y| \leq (x - y)^{2020}$ για κάθε $x, y \in (1, +\infty)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)} - \ln x$, $x > 1$ είναι σταθερή και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της f , αν $f(e) = 0$.

Εργασία 2^η: (Εύρεση τύπου συνάρτησης)

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

- $f'(x) = 3x^2 + x + 1$ όταν $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$
- $f'(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ όταν $x \in \Delta = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $f(0) = 2$
- $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ όταν $x \in \Delta = (0, +\infty)$ και $f(1) = 3$.
- $f'(x) = e^x - \eta\mu x$ όταν $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 3$
- $f'(x) = 2e^x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ όταν $x \in \Delta = (0, +\infty)$ και $f(1) = 2e$
- $f''(x) = 12x - 2$ όταν $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f'(1) = 7$ και $f(1) = 3$
- $f''(x) = 6x + 2$ όταν $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f'(0) = 1$ και $f(1) = -3$

Εργασία 3^η : (ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ - ΠΗΛΙΚΟΥ)

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

- i. $x \cdot f'(x) \cdot \ln x + f(x) = 2x^2$ όταν $x \in \Delta = (1, +\infty)$ και $f(e) = e^2$
- ii. $(1+x^2) \cdot f'(x) = 2x \cdot f(x)$ όταν $x \in \Delta = (0, +\infty)$ και $f(1) = 1$
- iii. $x \cdot f'(x) - f(x) = 2x^3$ όταν $x \in \Delta = (0, +\infty)$ και $f(1) = 1$
- iv. $f'(x) = \eta\mu x + x \sigma\upsilon\nu x$ όταν $x \in \Delta = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $f(0) = 0$
- v. $f'(x) = 2x \sigma\upsilon\nu x - x^2 \eta\mu x$ όταν $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$
- vi. $\eta\mu x \cdot f'(x) = 2x \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x \cdot f(x)$ όταν $x \in \Delta = \mathbb{R}$ με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$

Εργασία 4^η : (ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ)

1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση :

$$2f'(x) = e^{x-f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0. \text{ Ναδειχθεί ότι : } f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right).$$

2. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x) \cdot f'(x) - \eta\mu x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = -\sqrt{2}$, να βρείτε τον τύπο της f .

3. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση :

$$f'(x) = 4x^3 e^{-f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = \ln 3. \text{ Να βρείτε τον τύπο της } f.$$

4. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

- i. $f'(x) = 2xe^{-f(x)}$, $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(1) = 1$
- ii. $x^2 f'(x) + e^{-f(x)} = 0$, $x \in \Delta = (0, +\infty)$ και $f(1) = 0$
- iii. $f'(x) + 2xf^2(x) = 0$, $f(x) \neq 0$, $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$
- iv. $f'(x) - e^x \sqrt{f(x)-1} = 0$, $f(x) > 1$, $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$
- v. $f'(x) = f^2(x) \sigma\upsilon\nu x$, $f(x) \neq 0$, $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$

5. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f'(3x-1) = 2x+1$. Αν $f(2)=5$, να βρείτε τον τύπο της f .

6. Έστω μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f'(x^2) = 3x-1$ για κάθε $x>0$. Αν $f(1)=1$, να βρείτε τον τύπο της f .

Εργασία 5^η: (ΤΕΧΝΑΣΜΑ ΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟ ΜΕ $e^{G(x)}$)

1. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

- i. $f'(x) - f(x) = e^x$ όταν $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$
- ii. $f'(x) \cdot e^x = 2x - x^2$, όταν $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$
- iii. $f'(x) = 2xf(x)$ όταν $x \in \Delta = (0, +\infty)$ και $f(0) = 1$.

2. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις :

- i. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 2$ και $f'(x) + f(x) = x^2 + 2x$ $x \in \mathbb{R}$
- ii. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = e$ και $f'(x) - 2xf(x) = 0$ $x \in \mathbb{R}$
- iii. $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = \frac{1-e}{e}$ και $x^2 f'(x) - f(x) = 1$ $x > 0$
- iv. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f'(x) = 3x^2 f(x)$, $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$
- v. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 3$ και $f'(x) - x^3 = f(x) - 3x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

3. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(x) > 0$ η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f'(x) = f(x) \cdot \ln f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$. Να βρείτε τον τύπο της f .

4. Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f'(x) = \frac{x+1}{x} f(x)$, για κάθε $x > 0$ και $f(1) = e$. Να βρείτε τον τύπο της f .

5. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{e}$, και $xf'(x) = (x-1)f(x)$ για κάθε $x > 0$. Να βρείτε τον τύπο της f .

6. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}$, και $f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x = f(x)\eta\mu x$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Να βρείτε τον τύπο της f .

7. Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι :

- i. Η συνάρτηση $g(x) = \frac{f'(x) + f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή,
- ii. $(f(x)e^x)' = e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- iii. ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Εργασία 6^η: (ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ f ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ)

1. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν :
 $f'(x) - 2x + 2x(f(x) - x^2) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$, $f(x) \neq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$.
2. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν :
 $(xf'(x) - 1) \cdot (f(x) - \ln x) = x^2$, για κάθε $x > 0$ και $f(1) = 1$. Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

Εργασία 7^η: (ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕ $f''(x)$)

1. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(0) = 2f'(0) = 1$ και : $f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .
2. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες :
- $f''(x) - 2xf'(x) = 2f(x)$, $x \in \mathbb{R}$
 - $f(2) = e$, $f'(0) = 0$
 - $f(x) > 0$.
- Να βρείτε τη συνάρτηση f .
3. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες :
- $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$
 - $f(1) = \frac{e}{2}$, $f'(1) = \frac{3e}{2}$
- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x - \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή.
- ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f .
4. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες :
- $e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = -f''(x)$, $x \in \mathbb{R}$
 - $f(0) = \ln 2$, $f'(0) = \frac{1}{2}$.
- Να βρείτε τη συνάρτηση f .
5. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες :
- $f(x)f''(x) - f(x)f'(x) = (f'(x))^2$, $x \in \mathbb{R}$
 - $f(0) = e$, $f'(0) = e$
 - $f(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε τη συνάρτηση f .

Εργασία 8^η: (ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕ $f(x)$ ΚΑΙ $g(x)$)

1. Έστω $f, g : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και ικανοποιούν τις συνθήκες :

$$\bullet \quad f'(x) = e^{-g(x)}, \quad g'(x) = e^{-f(x)}, \quad \text{για κάθε } x > -1 \quad \bullet \quad f(0) = g(0) = 0$$

Να δείξετε ότι $f = g$ και στη συνέχεια να βρείτε τις συναρτήσεις : f, g .

2. Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις οι οποίες είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιούν τις συνθήκες :

$$\bullet \quad f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)}, \quad g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \bullet \quad f(0) = g(0) = 1,$$

$$\bullet \quad f(x) \cdot g(x) \neq 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad \text{Να βρείτε τις συναρτήσεις : } f, g.$$

Εργασία 9^η: (ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΧΕΣΕΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $f(x) = \alpha \cdot g(x)$)

1. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες :
 $f(x) \cdot f'(-x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$. Να δείξετε ότι $f(x) \cdot f(-x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες :
 $f(x) \cdot f'(-x) = 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

i. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$. ii. Να δείξετε ότι $f(x) \cdot f(-x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

iii. Να βρείτε τον τύπο της f .

Εργασία 10^η: (ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ $f(x)$ ΚΑΤΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ)

1. Έστω $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες :
 $x^3 f'(x) + x^2 f(x) = 2x^3 + 1$, για κάθε $x \neq 0$ και $f(1) = 5$, $f(-1) = 2$.

Να βρείτε τον τύπο της f .

2. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες :
 $xf'(x) - 2f(x) = x^3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 4$, $f(-1) = -2$. Να βρείτε τον τύπο της f .

3. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες :
 $xf'(x) - f(x) = 2x^2 - x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$. Να βρείτε τον τύπο της f .
4. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες :
 $(x-1)f'(x) = 2x^2 + x - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(-2) = 3$. Να βρείτε τον τύπο της f .

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν $\frac{f(x)}{f'(x)} + x \ln x = 0$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(e, f(e))$ είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): x - y = 2019$
2. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, $f(0) = -2$ και $f'(x^5 + x) = 6x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$.
3. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ ικανοποιεί την σχέση $f'(x) = f(x) \ln f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο A με τεταγμένη $y = e$.
- α. Να βρείτε τον τύπο της f .
- β. Να αποδείξετε η ευθεία $y = e(x+1)$ εφάπτεται της C_f στο σημείο A .
4. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ με $f'(0) = f(0)$ και $f(x+y) = f(x)f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
- α. Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.
- β. Να βρεθεί ο τύπος της f .
5. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη σε κάθε σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1+x_0, 0)$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $B\left(1, \frac{1}{e}\right)$, τότε να βρείτε τον τύπο της f .
6. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x) - f(y)| + \sin(2x - 2y) \leq 1$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.