

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ****ΕΝΟΤΗΤΑ : «Κανόνες παραγώγισης»****Εργασία 1^η** Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων :

α) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$, **β)** $f(x) = 2x^2 + \ln x - \frac{1}{x}$, **γ)** $f(x) = x^2 e^x$, **δ)** $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \eta \mu x}$,
ε) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} + 4\sqrt{x} - \sqrt{2}$, **στ)** $f(x) = x^2 e^x \eta \mu x$, **ζ)** $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$, **η)** $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

Εργασία 2^η Όμοια και των συναρτήσεων :

α) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, **β)** $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, **γ)** $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, **δ)** $f(x) = \frac{12}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^4}$,
ε) $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\eta \mu x}$, **στ)** $f(x) = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$, **ζ)** $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, **η)** $f(x) = x^2 \sqrt{x} \ln x$.

Εργασία 3^η Να βρείτε , όπου ορίζεται , την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων :

α) $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + x, & x \geq 0 \\ 2x\sqrt{x} + \eta \mu x, & x < 0 \end{cases}$, **β)** $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu x, & x \leq 0 \\ x^3, & x > 0 \end{cases}$, **γ)** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < 0 \\ \eta \mu x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$,
δ) $f(x) = x|x|$, **ε)** $f(x) = |x^2 - 2x|$, **στ)** $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x^2 + 5}{6}, & x > 1 \end{cases}$, **ζ)** $f(x) = x|x^2 - 3x|$.

Εργασία 4^η Έστω $g: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^*$, παραγωγίσιμη , και η συνάρτηση $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{\eta \mu x}{g(x)} \text{ , όπου } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ . Αν } g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ , υπολογίστε την } g'\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ .}$$

Εργασία 5^η Αν $f(x) = 3 \frac{\sqrt{x} - x}{1 - x}$ και $g(x) = \frac{3\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$, να προσδιορίσετε τις παραγώγους f', g' και εξετάστε αν ισχύει $f'(x) = g'(x)$.**Εργασία 6^η** Αν $f(x) = 6x - 2 + \frac{1}{x}$, να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $x \cdot f'(x) + f(x) = 12x - 2$.**Εργασία 7^η** Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπο $f(x) = \frac{3x^2 + 3}{x^2 - 1}$ και $g(x) = \frac{3|x| + 3}{|x| - 1} + \frac{3|x| - 3}{|x| + 1}$, να αποδείξετε ότι $f'(x) = g'(x)$.



Εργασία 8^η Αν f, g παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$ και $f'(0) = -1$, $g'(0) = 2$, $f(0) = -1$, $g(0) = -2$, να αποδείξετε ότι : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) - 2}{x} = 0$.

Εργασία 9^η Αν $f, g: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $x_0 = 1$ και για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει : $e^x f(x) - g(x) \ln x = \alpha e^x g(x)$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι :

$$f'(1)g(1) - f(1)g'(1) = \frac{g^2(1)}{e}.$$

Εργασία 10^η Αν $f(x) = x^2 e^x$, να βρεθεί ο $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε : $f'(x_0) = e^{x_0}$.

Εργασία 11^η Αν $f(x) = x^2 - (\alpha - \beta + 1)x - (\alpha + \beta)$, να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε : $f(-1) = f'(1) = 0$

Εργασία 12^η Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 6x^2, & x < 0 \\ 2x^2 - 6x^4, & x \geq 0 \end{cases}$. Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια στο σημείο $x_0 = 0$ την συνάρτηση f' .

Εργασία 13^η Αν οι $f, g: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $f(x) \sinh x = e^x g(x) - 3g(x) \cosh x$, να δείξετε ότι :

$$f'(0)g(0) - f(0)g'(0) = g^2(0).$$

Εργασία 14^η Δίνονται δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 = 0$, έτσι ώστε $g'(0) = 12$. Επίσης για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $g(x) = 2e^x f(x)$. Να δείξετε ότι :

$$f'(0) = 6 - f(0).$$