



ΦΥΛΛΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΕΝΟΤΗΤΑ : «Εξίσωση εφαπτομένης»

Ομάδα Β

1. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης των καμπύλων $y = f(x)$ με συντελεστή διεύθυνσης λ όταν $f(x) = 2x^2 - 3$ $\lambda = 4$
2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης των καμπύλων $y = f(x)$ που σχηματίζουν γωνία ω με τον άξονα $x'x$ όταν $f(x) = x^2 - x + 100$, $\omega = 45^\circ$
3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) όταν $f(x) = x \ln x$ $(\varepsilon): y = 2x + 2009$
4. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία (ε) όταν $f(x) = 4x^2 - 2x + 5$ $(\varepsilon): x + 6y - 1 = 0$
5. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = f(x)$ που διέρχεται από το σημείο A όταν $f(x) = e^x(x-1)^2 + e^x$ $A(0,0)$
6. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
7. Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η εφαπτομένη της C_f της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 - 2x \ln x$, $x > 0$ στο $x_0 = 1$ να περνάει από την αρχή των αξόνων.
8. Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_f όταν:
i) $f(x) = x^2 + x + 1$ και $(\varepsilon): y = 3x - 2$
ii) $f(x) = \ln x + x$ και $(\varepsilon): y = 2x - 1$
9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + 2$ και η ευθεία $y = -x + \alpha$. Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία να εφάπτεται στην C_f .
10. Η ευθεία $y = 2x + 1$ είναι η εφαπτομένη ευθεία της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g όταν $g(x) = f\left(-\frac{1}{x}\right)$ στο σημείο $B(-1, g(-1))$.
(Δίνεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$).
11. Έστω $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y = (\lambda - 1)x + \lambda - 4$ να είναι εφαπτομένη της C_f και να βρεθεί το σημείο επαφής.
12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2 + 3$, $x > 0$ και το σημείο $A(1, f(1))$. Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x + 4$ είναι η εφαπτομένη της C_f στο A , να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.



13. Να προσδιοριστούν οι τιμές των α, β ώστε οι καμπύλες των συναρτήσεων $f(x) = x^3 - x + \alpha$ και $g(x) = \beta x^2 - 2\alpha x + \beta$ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $x_0 = 1$.
14. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - 4x + 5$ και $g(x) = x^2 + 2x - 4$. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(3, 2)$ εφάπτεται και στη C_g .
15. i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4(1-x) \cdot e^{2x} = 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
ii. Να αποδείξετε ότι η C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη, όπου: $f(x) = e^x$ και $g(x) = \sqrt{x}$.
16. Έστω $f(x) = \frac{x^2 + 2\alpha x + \beta}{x^2 + 1}$, $\alpha \neq 0$. Να δείξετε ότι υπάρχουν δυο σημεία $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ της C_f στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στον $x'x$ και ότι $x_1 \cdot x_2 = -1$.
17. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $f(\ln x) = x \ln x - x + 1, x > 0$
i) Αποδείξτε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων
ii) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στην C_f στο σημείο $(0, f(0))$.
iii) Υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ και τους άξονες $x'x, y'y$.
18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{|x|}, x \in \mathbb{R}$.
i) Να εξετάσετε αν ορίζεται εφαπτομένη στο σημείο $A(0, 1)$.
ii) Να βρείτε τις εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από την αρχή των αξόνων
iii) Φέρνουμε την ευθεία $(\varepsilon): y = \alpha$ με $\alpha > 1$ που κόβει την C_f στα σημεία B, Γ . Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία B, Γ τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.
19. Έστω η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με: $f(x) = 2019 + |\ln(x-1)|$ και $c \in \mathbb{R}$ με $c > 2019$
i) Να βρείτε την παράγωγο της f
ii) Αν η ευθεία με εξίσωση $y = c$ τέμνει την C_f σε δύο διαφορετικά σημεία A και B να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα A και B είναι κάθετες μεταξύ τους.
20. Έστω f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$ και $f(0) = 1$.
i) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $h: h(x) = xf(x)$ και $g: g(x) = f(x) - \frac{x}{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$
ii) Οι εφαπτόμενες των C_g, C_h στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ είναι κάθετες.
21. Αν η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f(x^2) + f(x^3) = 5 \ln x + 4$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(1, f(1))$.
22. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x^2 + x + 1) = x^3$
Α. i) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ είναι οριζόντια



ii) Να βρείτε την $f'(3)$

iii) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(3, f(3))$

Β. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο της $A(3,1)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $\frac{4}{9}$.

23. Έστω f συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - 2x + 3}{x - x_0} = 0$

Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2x - 3$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

24. Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x^2 - 1}{x - 1} = 2009$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

25. Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2x - 2}{x} = 2009$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

26. Έστω οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με την g παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν: $f(x)g(x) = 1$ και $g'(x) = -g(x)$. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f, C_g στα σημεία $M(\alpha, f(\alpha)), N(\alpha, g(\alpha))$ είναι:

i)κάθετες

ii)τέμνουν τον άξονα $x'x$ σε δυο σημεία που η μεταξύ τους απόσταση είναι σταθερή

27. Έστω $f(x) = \frac{4}{x-2}, x \neq 2$. Αν A, B είναι σημεία της C_f ώστε οι εφαπτόμενες στα σημεία αυτά να έχουν συντελεστή διεύθυνσης -1 τότε:

i)Να βρείτε τις συντεταγμένες A, B

ii)Να γράψετε τις εξισώσεις $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ των εφαπτομένων στα σημεία αυτά

iii)Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση g ισχύει η σχέση: $g(1-x) - g(1+x) = -2x, \forall x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $(1, g(1))$ είναι κάθετη στις $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$.

28. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) \cdot h(x)$ και $h^2(x) = 1 - [h'(x)]^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οι συναρτήσεις f, h είναι παραγωγίσιμες και το $M(\alpha, \beta)$ είναι κοινό σημείο της C_f, C_g με $f(\alpha) \neq 0$.

i)Να βρείτε το $h(\alpha)$

ii)Να αποδείξετε ότι η C_h έχει στο σημείο $N(\alpha, h(\alpha))$ οριζόντια εφαπτομένη της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

iii)Να εξετάσετε αν οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο M .