

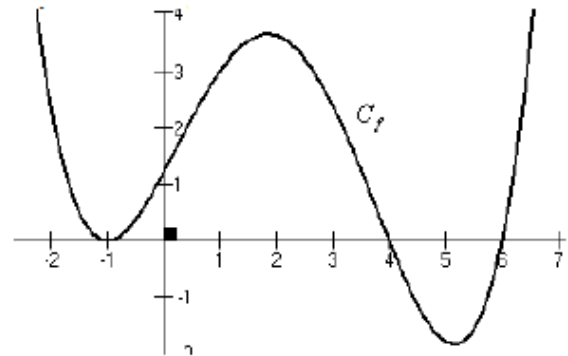
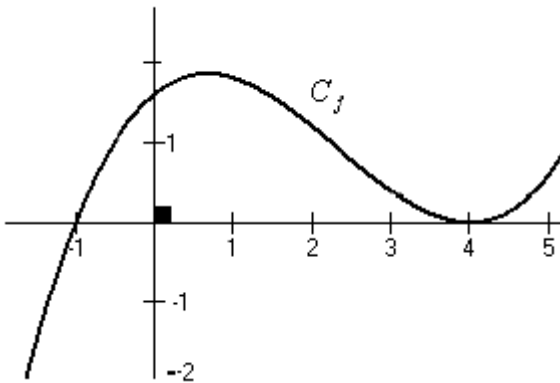


## ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

## ΕΝΟΤΗΤΑ: «ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ - ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ»

ΕΡΓΑΣΙΑ 1<sup>η</sup> (ΕΥΡΕΣΗ ΚΥΡΤΩΝ – ΚΟΙΛΩΝ & ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΜΠΗΣ)

1. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της παραγώγου  $f'(x)$  μιας συνάρτησης  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή ή κοίλη.



2. Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτών – κοίλων και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων.

i.  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x$

ii.  $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 2x + 1$

iii.  $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$

iv.  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

3. Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτών – κοίλων και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων.

i.  $f(x) = e^x(x^2 + 1)$

ii.  $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$

iii.  $f(x) = \frac{e^x}{x}$

iv.  $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

4. Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτών – κοίλων και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων.

i.  $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 4, & x \leq 0 \\ x^3 - 6x^2 + 4, & x > 0 \end{cases}$

ii.  $f(x) = \begin{cases} x^3 + 6x^2 - 2, & x \leq 1 \\ x^3 - 9x^2 + 13, & x > 1 \end{cases}$

ΕΡΓΑΣΙΑ 2<sup>η</sup> (Η  $f(x)$  ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ)

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει ότι :  $f^2(x) + e^x = 3f(x) - \alpha^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  όπου  $0 < \alpha \neq 1$ . Να αποδείξετε ότι η  $C_f$  δεν έχει σημεία καμπής.
2. Έστω μια συνάρτηση  $f: (1,3) \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και ισχύει  $f^2(x) + xf(x) + x^2 - 3x + 1 = 0$  για κάθε  $x \in (1,3)$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  δεν παρουσιάζει καμπή.

**ΕΡΓΑΣΙΑ 3<sup>η</sup>** (ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ)

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha x^5 - (4\beta + 2)x^3 + (\alpha - 1)x + 1$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ , ώστε η  $C_f$  να έχει σημείο καμπής το  $A(1, -4)$ .
2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 + 2x + 1$  με  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου  $\alpha$ , η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ .
3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha^2 x^4 - 4\alpha x^3 + 6(2\alpha - 1)x^2 - 4x + 11$ , με  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\alpha$  η  $C_f$  έχει σημείο καμπής στο  $x_0 = 1$ .
4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$  με  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ , ώστε η  $C_f$  να έχει στο  $x_1 = -1$  ακρότατο το 10 και στο  $x_2 = 1$  να έχει σημείο καμπής.
5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \lambda x^4 + 2(\lambda - 3)x^3 + 6\lambda x^2 - 3x + 5$  με  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ , η συνάρτηση  $f$  είναι κοίλη στο  $\mathbb{R}$ .

**ΕΡΓΑΣΙΑ 4<sup>η</sup>** (ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ)

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - \ln x$ .
  - i. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα.
  - ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A(1, f(1))$ .
  - iii. Να αποδείξετε ότι  $e^x \geq (e-1)x + \ln x + 1$  για κάθε  $x > 0$ .
2. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της  $C_f$  της συνάρτησης  $f(x) = e^x(x^2 + 3)$  σε οποιοδήποτε σημείο της δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη  $C_f$  εκτός του σημείου επαφής.
3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{2x} + x^4$ .
  - i. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα.
  - ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A(0, f(0))$ .
  - iii. Να αποδείξετε ότι  $e^{2x} \geq 1 + 2x - x^4$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x^2 - 4x + 6)e^{x-1}$ .
  - i. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα.
  - ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A(1, f(1))$ .
  - iii. Να αποδείξετε ότι  $e^{x-1} \geq \frac{x+2}{x^2 - 4x + 6}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .



5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\eta\mu(\pi x)}{\pi} - 2x^2 - x \ln x$ .

- Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $A(1, f(1))$ .
- Να αποδείξετε ότι  $\frac{\eta\mu(\pi x)}{\pi} - x \ln x \leq 2x^2 - 6x + 4$  για κάθε  $x > 0$ .

6. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x + a \ln x)^2$ , με  $a \in \mathbb{R}$ . Η εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) της  $C_f$  στο σημείο της  $A(1, f(1))$  είναι παράλληλη στην ευθεία : ( $\zeta$ ) :  $8x - 2y + 2021 = 0$ .

- Να βρείτε τον αριθμό  $a$  και την εξίσωση της ( $\varepsilon$ )
- Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα
- Να αποδείξετε ότι  $3 + (x + \ln x)^2 \geq 4x$  για κάθε  $x > 0$ .

7. Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = \ln(\ln x)$ .

- Να δείξετε ότι η  $f$  είναι κοίλη.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $x_0 = e$ .
- Να δείξετε ότι  $\ln(\ln x) \leq \frac{x}{e} - 1$  για κάθε  $x \in (1, +\infty)$ .
- Να λυθεί η εξίσωση  $e \ln x - e^{\frac{x}{e}} = 0$  στο διάστημα  $(1, +\infty)$ .

### ΕΡΓΑΣΙΑ 5<sup>η</sup> (ΥΠΑΡΞΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΑΜΠΗΣ)

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(e^x - x)$ . Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει δύο, ακριβώς, σημεία καμπής.

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x - x + e^x - \frac{x^2}{2}$ . Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln^2 x - x \ln x$ . Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα  $x_0 \in (1, 2)$  στο οποίο συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει καμπή.

**ΕΡΓΑΣΙΑ 6<sup>η</sup>** (ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ Θ. Μ. Τ.)

1. Έστω μια κυρτή συνάρτηση  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι

- i.  $f(\alpha) + f(\beta) \geq 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$  για κάθε  $\alpha, \beta \in \Delta$ .
- ii.  $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$ .

2. Έστω μια κοίλη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι :

- i.  $\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \leq f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$  για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- ii.  $f'(x) < f(x) - f(x-1) < f'(x-1)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

3. Έστω  $f : [\alpha, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, η οποία είναι κυρτή. Να δείξετε ότι

$$f'(\alpha) < \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}, \text{ για κάθε } x \in (\alpha, +\infty).$$

4. Έστω μια συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι κοίλη. Να δείξετε ότι  $f(x) + f(3x) < 2f(2x)$ , για κάθε  $x > 0$ .

5. Έστω μια συνάρτηση  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι κυρτή και ισχύει  $f(0) = 0$  και  $f'(x) > 1$  για κάθε  $x > 0$ . Να δείξετε ότι  $x < f(x) < xf'(x)$ , για κάθε  $x > 0$ .

6. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x \ln x$ .

- i. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα.
- ii. Να αποδείξετε ότι :  $\frac{\alpha \ln \alpha + \beta \ln \beta}{\alpha + \beta} \geq \ln \frac{\alpha + \beta}{2}$  για κάθε  $\alpha, \beta > 0$ .