

**ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ**
ΕΝΟΤΗΤΑ: «ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ»**ΕΡΓΑΣΙΑ 1^η**

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

ii. $f(x) = \frac{3x-4}{x^2-3x+2}$

v. $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-2x+1}$

iii. $f(x) = \frac{3x^2-5}{x^3-3x+2}$

iv. $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{(x-2)^3}$

vi. $f(x) = \frac{x-5}{|x-2|}$

vii. $f(x) = \frac{3x+1}{3-x}$

viii. $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-5x+6}$

ix. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x-1}, & x \leq 0 \\ \frac{\ln x}{x}, & x > 0 \end{cases}$

ΕΡΓΑΣΙΑ 2^η

Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{2x^4-3x+1}{x^4+1}$

ii. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} - \frac{x^2-2}{x+1}$

iii. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x-1}{4-x}}$

ΕΡΓΑΣΙΑ 3^η

Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{2x^3-9x+1}{x^2-5x+6}$

ii. $f(x) = \sqrt{x^2+4x+5}$

iii. $f(x) = x + \ln \left(\frac{x-3}{x+1} \right)$

ΕΡΓΑΣΙΑ 4^η

Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{6x^2+2x+1}{2x-4}$

ii. $f(x) = \sqrt{x^2-2x+4}$

iii. $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$

iv. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

v. $f(x) = \frac{\ln(9-x^2)}{x^2}$

vi. $f(x) = \frac{6x^3-5x^2+7}{2x^3+11x-13}$

vii. $f(x) = \sqrt{x^2+2x-3} - x$

viii. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{x-1}$

ix. $f(x) = 3x-5 + \frac{7}{e^x+x^2}$

ΕΡΓΑΣΙΑ 5^η

Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2-x+5}{x-1}, & x < 1 \\ \frac{6x-5}{2x-4}, & 1 \leq x \neq 2 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-x+5}{x-2}, & x < 2 \\ \sqrt{x^2+4x+13}, & x \geq 2 \end{cases}$

iii. $f(x) = x - |e^x - 1|$

**ΕΡΓΑΣΙΑ 6^η**

Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν πλάγιες ασύμπτωτες τις αντίστοιχες ευθείες :

- i. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$ την $(\varepsilon): y = x + 2$ όταν $x \rightarrow -\infty$
- ii. $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 7}{x - 1}$ την $(\varepsilon): y = 2x - 3$ όταν $x \rightarrow +\infty$
- iii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5} + x + 3$ την $(\varepsilon): y = 2x + 3$ όταν $x \rightarrow +\infty$

ΕΡΓΑΣΙΑ 7^η

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x}{x - 2}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 + \beta x + 16} + x$. Να βρείτε :
 - i. τις τιμές των α, β αν η ευθεία $(\varepsilon): y = \alpha x - 5$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
 - ii. το πεδίο ορισμού της f
 - iii. την ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 5} + \alpha x$. Να βρείτε :
 - i. το α αν η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): 4x - 2y + 2020 = 0$
 - ii. τις ασύμπτωτες της C_f .
4. Να υπολογιστούν τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a^2 x \sqrt{9x^2 + x + 1} - 3a^2 x^2$ να έχει ασύμπτωτη για $x \rightarrow +\infty$ την ευθεία $x - y - \beta = 0$.

ΕΡΓΑΣΙΑ 8^η

1. Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 3x + 6$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 3x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}$.
2. Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 5x - 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 5x^2 - \lambda x + 4}{\lambda f(x) + 10x - 2} = \frac{1}{4}$.
3. Έστω η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x + 5$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
 - i. Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$
 - ii. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ , αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu f(x) + 4x}{xf(x) - 2x^2 + 3x} = 1$
4. Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρεθεί :
 - i. το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 4x^2 + \sqrt{x^4 + 1}}{x^2 f(x) - 2x^3 + x^3 \eta \mu \frac{1}{x}}$
 - ii. ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 2x^2 + \lambda x + 13}{\lambda f(x) - 4x + 21} = \frac{4}{7}$.