



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ: «Ορισμένο ολοκλήρωμα - Οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος»

ΕΡΓΑΣΙΑ 1^η

Ιδιότητα: $\int_{\alpha}^{\beta} (\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)) dx = \lambda \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \mu \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

1. Οι συναρτήσεις $f, g : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και ικανοποιούν τις σχέσεις: $\int_1^3 f(x) dx = 5$
και $\int_1^3 g(x) dx = -2$. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_1^3 (2f(x) - 6g(x)) dx$ β) $\int_1^3 (3f(x) - g(x)) dx$

2. Η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ικανοποιεί τη σχέση: $\int_0^1 f(x) dx = 3$.
Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 [f(x) - 2] dx$

3. Να αποδείξετε τις παρακάτω σχέσεις:

α) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + 1} dx + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^2}{2x^2 + 1} dx = \beta - \alpha$

β) $\int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2 - x + 1} dx + \int_0^1 \frac{x}{x^2 - x + 1} dx = 1$

γ) $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} + \int_0^1 \frac{dx}{1+e^{-x}} = 1$

δ) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sigma \nu^2 x}{\sigma \nu 2x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta \mu^2 x}{\sigma \nu 2x} dx = \frac{\pi}{6}$

4. Η συνάρτηση $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ικανοποιεί τη σχέση:

$\int_0^{\pi} f(x) \cdot \eta \mu x dx = \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sigma \nu x dx = 0$. Να αποδείξετε ότι: $\int_0^{\pi} f(x) \cdot \eta \mu(x+1) dx = 0$

5. Οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x) g(t) dt \right) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$ β) $\int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\gamma}^{\delta} f(t) g(x) dx \right) dt = \int_{\gamma}^{\delta} \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(t) g(x) dt \right) dx$

ΕΡΓΑΣΙΑ 2^η

Ιδιότητα: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$

1. Να αποδείξετε τις παρακάτω σχέσεις:

α) $\int_1^2 \frac{x}{x+1} dx + \int_2^1 \frac{-1}{x+1} dx = 1$

β) $3 \int_{-6}^2 \frac{x^2 + 6}{x^2 + 9} dx - 9 \int_2^{-6} \frac{1}{x^2 + 9} dx = 24$

2. Οι συναρτήσεις $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και ικανοποιούν τις σχέσεις: $\int_0^1 f(x) dx = 2$
και $\int_0^1 g(x) dx = -3$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

α) $\int_1^0 (3f(x) - 2g(x)) dx$ β) $\int_1^0 (-2f(x) + g(x)) dx$

3. Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία είναι: $2 \int_{-4}^{\kappa} \frac{x^2}{3x^2 + 12} dx - \int_{\kappa}^{-4} \frac{8}{3x^2 + 12} dx = 1$

**ΕΡΓΑΣΙΑ 3^η**

Ιδιότητα: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$

1. Να αποδείξετε ότι: $\int_1^2 \frac{x-1}{e^x} dx + \int_2^1 \frac{x-1}{e^x} dx = 0$

2. Η συνάρτηση $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ικανοποιεί τη σχέση: $\int_0^4 f(x) dx = \int_3^4 f(x) dx$
Να αποδείξετε ότι: $\int_0^3 f(x) dx = 0$

3. Η συνάρτηση $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ικανοποιεί τις σχέσεις: $\int_0^3 f(x) dx = 3$ και $\int_0^4 f(y) dy = 7$
Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_3^4 f(u) du$

4. Η συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ικανοποιεί τη σχέση: $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 2f(x) dx$
Να αποδείξετε ότι: $\int_0^1 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx$

5. Η συνάρτηση $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ικανοποιεί τις σχέσεις: $\int_1^2 f(x) dx \cdot \int_2^3 f(x) dx = 6$
και $\int_1^3 f(x) dx = 5$. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: $\int_1^2 f(x) dx$ και $\int_2^3 f(x) dx$

6. Η συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ικανοποιεί τις σχέσεις: $\int_0^1 f(x) dx \cdot \int_1^2 f(x) dx = 6$ και
 $\left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2 + \left(\int_1^2 f(x) dx\right)^2 = 13$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^2 f(x) dx$

7. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\gamma}^{\delta} f(x) dx$
Να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\beta}^{\delta} f(x) dx$

8. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta+\gamma} f(x) dx - \int_{\beta}^{\gamma+\alpha} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{-\alpha}^{-\beta} f(x) dx$

9. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι: $\int_0^n f(x) dx = n$

Να αποδείξετε ότι: $\int_n^{n+1} f(x) dx = 1$

10. Η συνάρτηση $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και έστω $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Delta$. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \cdot \int_{\gamma}^{\delta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx \cdot \int_{\delta}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\delta} f(x) dx \cdot \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx = 0$$