



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ: «Το θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού»

ΕΡΓΑΣΙΑ 1^η

$$\int_a^b x^k dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_a^b$$

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \int_{-1}^1 (x^2 - x + 2) dx = \frac{14}{3} \quad \beta) \int_1^2 (x+1)(2x-1) dx = \frac{31}{6} \quad \gamma) \int_1^3 (2x^2 - 3x + 4) dx = \frac{40}{3}$$

$$\delta) \int_{-1}^1 (x^4 - 2x^3 + x + 1) dx = \frac{12}{5}$$

2. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $\int_0^\alpha (3x^2 + 4x - 5) dx = \alpha^3 - 2$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_1^2 x^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx \quad \beta) \int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x} dx \quad \gamma) \int_1^2 \frac{x+1}{x^4} dx \quad \delta) \int_1^2 \frac{x^3 - 2x + 5}{x} dx \quad \epsilon) \int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x^2} dx$$

ΕΡΓΑΣΙΑ 2^η

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_0^2 x \sqrt{x} dx \quad \beta) \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^2 dx \quad \gamma) \int_0^1 x^2 \sqrt[3]{x} dx \quad \delta) \int_1^2 \frac{x^2 \sqrt{x} - x + 1}{x^2} dx$$

$$\epsilon) \int_1^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \quad \zeta) \int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx \quad \eta) \int_1^4 \frac{3x+1}{\sqrt{x}} dx \quad \theta) \int_1^{16} \sqrt{x} \sqrt{x} dx$$

2. Να αποδείξετε ότι: $\alpha) \int_9^{16} \sqrt{x}(1-x) dx = \frac{72}{5}$ $\beta) \int_9^{16} \frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx = -\frac{5}{2}$ $\gamma) \int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx = \frac{8}{15}$ 3. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{αν } x < 1 \\ \sqrt{x+3}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ $\beta)$ Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^6 f(x) dx$ 4. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση:
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + \alpha, & \text{αν } x \leq 1 \\ 2\beta x + 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$
Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες είναι: $\int_0^2 f(x) dx = 15$

**ΕΡΓΑΣΙΑ 3^η**

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_0^1 (x^2 + \sigma\upsilon\nu(\pi x)) dx \quad \beta) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \eta\mu 2x \right) dx \quad \gamma) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$$

$$\delta) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sigma\upsilon\nu x - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right)^2 dx \quad \epsilon) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_{-1}^1 (x - e^x) dx \quad \beta) \int_{-1}^1 (2 + x - e^x) dx \quad \gamma) \int_0^1 \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{e^{4x}} dx \quad \delta) \int_0^1 \frac{1 + e^x}{e^{2x}} dx$$

ΕΡΓΑΣΙΑ 4^η (Ολοκληρώματα συναρτήσεων σε απόλυτη τιμή)

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \int_0^4 |x^2 - 5x + 6| dx = \frac{17}{3} \quad \beta) \int_{-1}^2 |x^2 - 1| dx = \frac{8}{3} \quad \gamma) \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx = e^{-1} + e - 2$$

$$\delta) \int_0^1 |e^{-2x} - e^{-x}| dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} + \frac{1}{2e^2} \quad \epsilon) \int_0^1 (1 - |x - 1|^3) dx = \frac{3}{4} \quad \zeta) \int_0^{2\pi} (|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x|) dx = 8$$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma\upsilon\nu x| dx \quad \beta) \int_0^3 |x^2 - 3x + 2| dx \quad \gamma) \int_0^{\frac{\pi}{2}} |x - \eta\mu x| dx \quad \delta) \int_0^2 (|x^2 - 1| + x) dx$$

$$\epsilon) \int_0^{\pi} (\sigma\upsilon\nu x + |\sigma\upsilon\nu x|) dx \quad \zeta) \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu 2x} dx$$

ΕΡΓΑΣΙΑ 5^η (Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων)

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_2^3 \frac{2}{x^2 - 1} dx \quad \beta) \int_1^2 \frac{3x + 2}{x^2 + x} dx \quad \gamma) \int_3^4 \frac{x + 1}{x^2 + x - 2} dx \quad \delta) \int_2^3 \frac{2}{x^2 + 3x} dx$$

$$\epsilon) \int_0^{-1} \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2} dx \quad \zeta) \int_1^2 \frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx \quad \eta) \int_2^3 \frac{x + 2}{x^2 - 6x - 7} dx \quad \theta) \int_2^3 \frac{x^2 - 2x - 1}{x^3 - x} dx$$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_0^1 \frac{x - 1}{x + 1} dx \quad \beta) \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 - 4} dx \quad \gamma) \int_0^1 \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} dx \quad \delta) \int_0^1 \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 4x + 3} dx$$

$$\epsilon) \int_2^3 \frac{x^3 + x^2 - 2x - 1}{x^2 - x} dx \quad \zeta) \int_0^1 \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2} dx \quad \eta) \int_0^1 \frac{x^2 - x + 2}{x + 3} dx$$

**ΕΡΓΑΣΙΑ 6^η**

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx = f(\beta) - f(\alpha) \right)$$

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \epsilon \phi x dx = \frac{\ln 2}{2}$$

$$\beta) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \epsilon \phi^2 x dx = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

$$\gamma) \int_1^e e^x \cdot \ln(xe^{\frac{1}{x}}) dx = e^e$$

$$\delta) \int_0^1 \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx = \frac{e-2}{2}$$

$$\epsilon) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu 2x \cdot e^{\eta \mu^2 x} dx = e - 1$$

$$\zeta) \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

$$\eta) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \sqrt{2} - 1$$

$$\theta) \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x (1 + \epsilon \phi x + \epsilon \phi^2 x) dx = e^{\frac{\pi}{4}}$$

2. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \int_1^e (3x^2 \ln x + x^2) dx = e^3 \quad \beta) \int_1^e \frac{1 - \ln x}{x^2} dx = \frac{1}{e} \quad \gamma) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\epsilon \phi x + \frac{x}{\sigma \nu \nu^2 x} \right) dx = \frac{\pi \sqrt{3}}{3}$$

$$\delta) \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{|\ln x|}{x} dx = 1 \quad \epsilon) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta \mu x - x \sigma \nu \nu x}{1 - \sigma \nu \nu 2x} dx = \frac{\pi(2\sqrt{3}-3)}{18} \quad \zeta) \int_1^e x^x (\ln x + 1) dx = e^e - 1$$

$$\eta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sigma \nu \nu x}{x \eta \mu x + \sigma \nu \nu x} dx = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \theta) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sigma \nu \nu 2x}{\eta \mu x \cdot \sigma \nu \nu x} dx = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \iota) \int_0^2 \frac{x^2 - 2x}{e^x} dx = -\frac{4}{e^2}$$

ΕΡΓΑΣΙΑ 7^η

1. Να αποδείξετε ότι: $\alpha) \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\epsilon \phi^3 x + \epsilon \phi x) dx = \frac{1}{2} \quad \beta) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \epsilon \phi^3 x dx = \frac{1 - \ln 2}{2}$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_e^{e^2} \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx \quad \beta) \int_0^1 \frac{1}{1 + e^x} dx \quad \gamma) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 + \eta \mu 2x}{2 \sigma \nu \nu^2 x} dx \quad \delta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta \mu x + x \sigma \nu \nu x) dx$$

$$\epsilon) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sigma \nu \nu^4 x - \eta \mu^4 x) dx \quad \zeta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu x - \sigma \nu \nu x}{e^x + \eta \mu x} dx \quad \theta) \int_{\sqrt{e}}^e \frac{2x \ln x - x}{\ln^2 x} dx \quad \eta) \int_0^{\pi} \frac{e^x + \sigma \nu \nu x}{e^x + \eta \mu x} dx$$

$$\iota) \int_1^2 \frac{1}{x(x^{100} + 1)} dx \quad \kappa) \int_0^1 \frac{1-x}{e^x} dx \quad \lambda) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\ln x^{\sigma \nu \nu x} + \frac{\eta \mu x}{x} \right) dx \quad \mu) \int_0^1 \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} dx$$

3. Η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 (x f''(x) + f'(x)) dx = f'(1)$$

4. Η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία α και β σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνίες $\frac{\pi}{6}$ και $\frac{\pi}{3}$ αντίστοιχα.

$$\text{Να αποδείξετε ότι: } \int_{\alpha}^{\beta} f''(x) f'(x) dx = \frac{4}{3}$$



5. Η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(1) = 0 \quad \text{και} \quad \int_0^1 [f'(e^x) - f(e^x)e^{-x}] dx = 1$$

α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης: $g(x) = \frac{f(e^x)}{e^x}$, με $x \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι $f(e) = e$

6. Η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο και είναι $f(0) = 1$ και $f(1) = 2$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_0^1 \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} dx \quad \beta) \int_0^1 x [2f(x) + xf'(x)] dx$$

ΕΡΓΑΣΙΑ 8^η

1. Η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο και είναι $f(0) = 1$ και $f(1) = 2$.

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_0^1 \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} dx \quad \beta) \int_0^1 x [2f(x) + xf'(x)] dx$$

2. Η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ και είναι $f(0) = f(1) = 1$.

Να αποδείξετε ότι: $\int_0^1 \frac{f(x) - f'(x)}{f^2(x)} e^x dx = e - 1$

3. Η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ έχει συνεχή παράγωγο στο $[0, 1]$ και είναι $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 \frac{f'(x) - f(x)}{e^x + f(x)} dx = \ln \left(1 + \frac{1}{e} \right)$$

ΕΡΓΑΣΙΑ 9^η

Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\alpha) f(x) = \int_0^1 (1 + tx - t^2 x^2) dt, \quad \text{με } x \in \mathbb{R} \quad \beta) f(x) = x + \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt, \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

$$\gamma) xf(x) = \ln x - \int_1^e f(x) dx, \quad \text{με } x > 0 \quad \delta) f'(x) = \int_0^1 f(x) dx, \quad \text{με } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1$$

$$\epsilon) f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(x) dx, \quad \text{με } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1 \quad \zeta) \int_0^1 e^{1-x} f(x) dx = f(x) + e^x, \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

$$\eta) f(x) + 1 = 9 \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^2 + x^2, \quad \text{με } x \in \mathbb{R} \quad \theta) f(x) = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x \cdot f(x) dx \right)^2, \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

$$\iota) xf'(x) = f(x) + \int_0^1 f(x) dx, \quad \text{με } x > 0$$