



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ: «Μέθοδοι ολοκλήρωσης - Παραγοντική ολοκλήρωση»

ΕΡΓΑΣΙΑ 1^η

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2 \quad \beta) \int_{-1}^1 (x+1)e^{x-1} dx = 1 + e^{-2} \quad \gamma) \int_0^1 (x^2 - x) \cdot e^x dx = e - 3$$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_0^1 x e^{-2x} dx \quad \beta) \int_0^1 x^2 e^{2x} dx \quad \gamma) \int_0^1 (x^2 + x - 1)e^x dx \quad \delta) \int_0^1 \frac{x-1}{e^x} dx \quad \varepsilon) \int_0^1 x e^{x+\ln x} dx$$
$$\zeta) \int_1^2 (x^2 - 2x)e^{-x} dx \quad \eta) \int_{-1}^2 x e^{|x|} dx$$

ΕΡΓΑΣΙΑ 2^η

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \int_1^2 x \ln x dx = 2 \ln 2 - \frac{3}{4} \quad \beta) \int_1^e (2x+1) \ln x dx = \frac{e^2+3}{2} \quad \gamma) \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x - 1| dx = \frac{e^2-3}{e}$$
$$\delta) \int_0^1 x \ln(x^2+1) dx = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_1^e \ln x dx \quad \beta) \int_e^{e^2} x^2 \ln x dx \quad \gamma) \int_1^e \ln \sqrt{x+1} dx \quad \delta) \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \quad \varepsilon) \int_1^e \ln^2 x dx \quad \zeta) \int_1^e x^3 \ln x dx$$
$$\eta) \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx \quad \theta) \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \quad \iota) \int_1^e \ln(2x+3) dx \quad \kappa) \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx \quad \lambda) \int_1^e \sqrt{x} \ln x dx$$

ΕΡΓΑΣΙΑ 3^η

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \eta\mu x dx = 1 \quad \beta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sigma\upsilon\nu x dx = \frac{\pi}{2} - 1 \quad \gamma) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \eta\mu x dx = \pi - 2$$
$$\delta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x dx = -\frac{1}{2} \quad \varepsilon) \int_0^{\frac{\pi}{6}} (3x^2 + 2) \cdot \eta\mu 3x dx = \frac{\pi+4}{9}$$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_0^{\pi} x |\sigma\upsilon\nu x| dx \quad \beta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sigma\upsilon\nu x dx \quad \gamma) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \eta\mu 3x dx \quad \delta) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x dx \quad \varepsilon) \int_0^{\pi} (x \eta\mu x)^2 dx$$
$$\zeta) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx \quad \eta) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\eta\mu^2 x} dx \quad \theta) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \epsilon^2 x dx$$

**ΕΡΓΑΣΙΑ 4^η**

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_0^{\pi} e^x \eta \mu x dx \quad \beta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sigma \nu \nu x dx \quad \gamma) \int_0^1 \frac{x + \eta \mu x}{e^x} dx \quad \delta) \int_0^{\pi} e^x \sigma \nu \nu 2x dx \quad \varepsilon) \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2x} \eta \mu 2x dx$$

2. Δίνονται τα ολοκληρώματα: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cdot \sigma \nu \nu^2 x dx$ και $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cdot \eta \mu^2 x dx$

α) Να αποδείξετε ότι: $I + J = \frac{e^{\pi} - 1}{2}$ και $I - J = -\frac{e^{\pi} + 1}{4}$

β) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα I και J

ΕΡΓΑΣΙΑ 5^η

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: α) $\int_1^2 \frac{x+1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}} dx$ β) $\int_1^2 e^x \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \ln x \right) dx$ γ) $\int_0^{\pi} (e^{\eta \mu x})'' \cdot x dx$

2. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, με $f(0) = 1$ και ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x) = f(x) + e^x - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 f(x) dx$

3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^2 \left(\int_0^{\pi} t \eta \mu t dt \right) x \sigma \nu \nu (\pi x) dx$

ΕΡΓΑΣΙΑ 6^η

1. Η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο $[0, 1]$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(1) = 5 \quad \text{και} \quad \int_0^1 f(x) dx = 2. \quad \text{Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: } I = \int_0^1 x f'(x) dx$$

2. Η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο και ικανοποιεί τη σχέση:

$$\int_0^1 x f'(x) dx = 2 - \int_0^1 f(x) dx. \quad \text{Να αποδείξετε ότι } f(1) = 2$$

3. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και είναι: $f'(-1) = -f(-1)$ και $f'(1) = f(1)$.

Να αποδείξετε ότι: $\int_{-1}^1 x f''(x) dx = 0$

4. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $M(\beta, f(\beta))$. Να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha) \cdot f''(x) dx = f(\alpha) - f(\beta)$

5. Η συνάρτηση $f : [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$, με $\alpha > 0$, είναι άρτια και έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο.

Να αποδείξετε ότι: $\int_{-\alpha}^{\alpha} x f''(x) dx = 0$

6. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση: $f''(x) = f(x)$,

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία α και β , να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x) dx = 2(\alpha f(\alpha) - \beta f(\beta))$$

**ΕΡΓΑΣΙΑ 7^η**

1. Η συνάρτηση f είναι περιττή και έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[-1, 1]$.

Να αποδείξετε ότι:
$$\int_{-1}^1 x f''(x) dx = 2(f'(1) - f(1))$$

2. Η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και η C_f εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1, 0)$. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 x^3 f''(x) dx = 6 \int_0^1 x f(x) dx$$

3. Η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(1) = 1 \quad \text{και} \quad \int_0^1 [x^2 f''(x) - 2f(x)] dx = 2. \quad \text{Να αποδείξετε ότι } f'(1) = 4$$

4. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x^3 + x) = 4x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad \text{Να αποδείξετε ότι: } \int_0^2 x f''(x) dx = 3$$

ΕΡΓΑΣΙΑ 8^η

1. Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε να είναι $f(\pi) = 1$ και f'' συνεχής στο $[0, \pi]$. Αν είναι:

$$\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta \mu x dx = 2 \quad \text{να υπολογίσετε την τιμή } f(0)$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε να είναι $f'(\pi) = \pi$ και f'' συνεχής στο $[0, \pi]$. Αν είναι:

$$\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \sigma \upsilon \nu x dx = -2\pi, \quad \text{να αποδείξετε ότι } f'(0) = \pi$$

3. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0, \pi]$ και είναι:

$$f(0) = \pi, f(\pi) = 3\pi \quad \text{και} \quad \int_0^\pi f''(x) \eta \mu x dx = \pi. \quad \text{Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: } \int_0^\pi f(x) \eta \mu x dx$$

4. Η συνάρτηση $f : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$, με $\alpha > 0$, έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και ικανοποιεί τη σχέση:

$$x f''(x) = f'(\alpha), \text{ για κάθε } x \in [0, \alpha]. \quad \text{Να αποδείξετε ότι } f(0) = f(\alpha)$$

5. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή τρίτη παράγωγο, το σημείο $A(1, 2)$ είναι σημείο καμπής της C_f

και ισχύει η σχέση:
$$\int_0^1 (x^3 f'''(x) + 6f(x)) dx = 9 \quad \text{Να αποδείξετε ότι } f'(1) = 1$$

6. Η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:
$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right) \cdot \left(\int_0^1 x f'(x) dx \right) \leq \frac{f^2(1)}{2}$$

7. Η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο και ικανοποιεί τη σχέση:
$$\int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 x f'(x) dx = 1$$

Να αποδείξετε ότι $|f(1)| \geq 2$



ΕΡΓΑΣΙΑ 9^η

1. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$f(1) = e$ και $f'(x) = e^{x^2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f(x)dx$

2. Η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$f(1) = f'(1) = 0$ και $f''(x) = \frac{6}{x^3 + 1}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^1 f(x)dx$

3. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, με $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την παράγωγο της f β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1}dx$

4. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, με $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 f^2(x)dx$