



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ: «Ολοκλήρωση με αντικατάσταση»

ΕΡΓΑΣΙΑ 1^η (Πολυωνυμικές – ρητές συναρτήσεις)

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{array}{llll} \alpha) \int_0^1 2x(x^2+1)^2 dx = \frac{7}{3} & \beta) \int_0^1 (x+1)^3 dx = \frac{15}{4} & \gamma) \int_0^1 (2x+1)^3 dx = 10 & \delta) \int_1^2 x(x-1)^4 dx = \frac{11}{30} \\ \epsilon) \int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{4} & \zeta) \int_{-1}^1 (x-1)(x+1)^{10} dx = -\frac{2^{10}}{33} & & \end{array}$$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{llll} \alpha) \int_0^1 x(x^2+1)^3 dx & \beta) \int_0^1 (x^2+x+1)(2x+1)dx & \gamma) \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx & \delta) \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^3+3x+2} dx \\ \epsilon) \int_0^1 \frac{2x-3}{(x^2-3x+4)^3} dx & & & \end{array}$$

ΕΡΓΑΣΙΑ 2^η (Άρρητες συναρτήσεις)

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{array}{llll} \alpha) \int_{-1}^0 x\sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{3} & \beta) \int_1^5 x\sqrt{x-1} dx = \frac{272}{15} & \gamma) \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{2-\sqrt{2}}{3} \\ \delta) \int_1^{16} \frac{x-2}{\sqrt[4]{x^3}} dx = \frac{84}{5} & \epsilon) \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{x-1} dx = 2 + \ln\left(\frac{3}{2}\right) & \zeta) \int_0^7 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx = 3\left(\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) \end{array}$$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{llll} \alpha) \int_0^1 \sqrt{2x+3} dx & \beta) \int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx & \gamma) \int_3^8 x\sqrt{1+x} dx & \delta) \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx \quad \epsilon) \int_1^4 \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx \\ \zeta) \int_1^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx & \eta) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+3}} dx & \theta) \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx & \iota) \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \end{array}$$

ΕΡΓΑΣΙΑ 3^η (Εκθετικές - Λογαριθμικές συναρτήσεις)

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{llll} \alpha) \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln^3 x} dx & \beta) \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx & \gamma) \int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx & \delta) \int_1^e \frac{\ln x}{x \sqrt{1+\ln x}} dx \quad \epsilon) \int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx \\ \zeta) \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x(1+\ln x)} dx & \eta) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}} & \theta) \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{2+3 \ln x}} & \iota) \int_1^e \frac{dx}{x(2+\ln x)} \quad \kappa) \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} \frac{\ln x}{x-x \ln x} dx \end{array}$$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{llll} \alpha) \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx & \beta) \int_0^1 \frac{e^{3x}+e^{2x}+e^x}{e^{2x}} dx & \gamma) \int_0^1 x e^{x^2} dx & \delta) \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad \epsilon) \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+e^{-x}} dx \\ \zeta) \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^{2x}+2e^x+1} & \eta) \int_{\ln 4}^{\ln 5} \frac{e^{2x}-e^x}{e^{2x}-4e^x+3} dx & \theta) \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{4x}-e^{2x}+1}{e^{2x}-1} dx & \iota) \int_1^{\ln 2} \frac{e^{3x}-2e^{2x}+e^x}{e^x-1} dx \end{array}$$

**ΕΡΓΑΣΙΑ 4^η**

1. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} e^x - e, & x < 1 \\ \frac{\sqrt{\ln x}}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$ Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^e f(x) dx$
2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{(2 \ln x + 1)^2}{x}, & x \geq 1 \\ xe^{1-x}, & x < 1 \end{cases}$ Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^e f(x) dx$
3. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(1 + \ln x)^2}, & x \geq 1 \\ \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right), & x < 1 \end{cases}$ Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^e f(x) dx$

ΕΡΓΑΣΙΑ 5^η (Τριγωνομετρικές συναρτήσεις)

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{aligned} \alpha) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{3 + \eta\mu^2 x} dx &= \frac{\ln 3}{4} & \beta) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \epsilon\phi^2 x}{(1 + \epsilon\phi x)^2} dx &= \frac{1}{2} & \gamma) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu 2x}{1 + \eta\mu x} dx &= 2(1 - \ln 2) \\ \delta) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu x} dx &= -\frac{1}{8} - \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \epsilon) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{4 - \eta\mu^2 x} dx &= \frac{\ln 3}{4} & \zeta) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu^3 x}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}} dx &= \frac{32 - 19\sqrt{2}}{20} \end{aligned}$$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned} \alpha) \int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\sigma\upsilon\nu \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx & \quad \beta) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \epsilon\phi x \ln(\sigma\upsilon\nu x) dx & \gamma) \int_1^e \frac{\sigma\upsilon\nu(\ln x)}{x} dx & \quad \delta) \int_3^8 \frac{\eta\mu \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx \\ \epsilon) \int_0^{\pi} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} dx & \quad \zeta) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \epsilon\phi x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx & \eta) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} dx & \quad \theta) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \epsilon\phi x}(1 + \epsilon\phi^2 x) dx \\ \iota) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu x}} dx & \quad \kappa) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu x dx & \lambda) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\eta\mu x} \cdot \sigma\upsilon\nu x dx & \quad \mu) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x(1 - \epsilon\phi x)} \end{aligned}$$

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{aligned} \alpha) \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx &= \frac{\pi}{4}, \text{ θέτοντας } x = \eta\mu u & \beta) \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx &= 2\pi, \text{ θέτοντας } x = 2\eta\mu u \\ \gamma) \int_0^1 \frac{3x^2}{\sqrt{2 - x^2}} dx &= \frac{3\pi}{4} - \frac{3}{2}, \text{ θέτοντας } x = 2\eta\mu u & \delta) \int_0^1 \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} dx &= \frac{4}{3}, \text{ θέτοντας } x = \eta\mu 2u \\ \epsilon) \int_0^1 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx &= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ θέτοντας } x = 2\eta\mu u & \zeta) \int_{3\sqrt{2}}^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} dx &= 3\left(\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}\right), \text{ θέτοντας } x = \frac{3}{\sigma\upsilon\nu u} \\ \eta) \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx &= \frac{\pi}{4}, \text{ θέτοντας } x = \epsilon\phi u & \theta) \int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2} dx &= \frac{\pi \ln 2}{8}, \text{ θέτοντας } x = \epsilon\phi u \end{aligned}$$

**ΕΡΓΑΣΙΑ 6^η** (Αντικατάσταση και παραγοντική ολοκλήρωση)

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned} \alpha) \int_0^{\sqrt{\pi}} x \eta\mu(x^2) dx & \quad \beta) \int_1^e \eta\mu(\ln x) dx & \gamma) \int_0^{\pi^2} \eta\mu(\sqrt{x}) dx & \quad \delta) \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx & \quad \varepsilon) \int_0^{\ln \pi} e^{2x} \eta\mu(e^x) dx \\ \zeta) \int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx & \quad \eta) \int_2^3 e^{\sqrt{x-2}} dx & \quad \theta) \int_e^{e^e} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx & \quad \iota) \int_1^{e^2} \sigma\upsilon\nu(\ln x) dx & \quad \kappa) \int_1^2 \frac{2-3x}{x^3} e^{\frac{2}{x}} dx \\ \lambda) \int_1^{e^{\pi}} \sigma\upsilon\nu^2(\ln x) dx & \quad \mu) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\eta\mu x} \eta\mu 2x dx & \quad \nu) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^3 x e^{\sigma\upsilon\nu x} dx & \quad \xi) \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sqrt{x} \eta\mu \sqrt{x} dx & \quad \omicron) \int_1^4 \ln(x + \sqrt{x}) dx \end{aligned}$$

2. Η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο και ικανοποιεί τη σχέση: $\int_0^1 f(x) dx = f(1)$.

Να αποδείξετε ότι: $\int_0^1 f'(\sqrt{x}) dx = 0$

3. Η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0, 1]$ και είναι $f(1) = f'(1) = 2$ και $f(0) = 0$.

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^1 x^3 f''(x^2) dx$

ΕΡΓΑΣΙΑ 7^η (Άρτια – περιττή συνάρτηση)

1. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$, με $\alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \text{ αν η } f \text{ είναι άρτια, τότε είναι: } \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$$

$$\beta) \text{ αν η } f \text{ είναι περιττή, τότε είναι: } \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$$

2. Η συνάρτηση $f : [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$, με $\alpha > 0$, είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x^2) \cdot \sigma\upsilon\nu x dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x^2) \cdot \sigma\upsilon\nu x dx$$

3. Η συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια και συνεχής. Να αποδείξετε ότι: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \eta\mu 3x dx = 0$

4. Να αποδείξετε ότι: $\int_{-\pi}^{\pi} (e^{x^2} - x) \eta\mu x dx = -2\pi$

ΕΡΓΑΣΙΑ 8^η

1. Η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και έστω $\gamma \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha+\gamma}^{\beta+\gamma} f(x-\gamma) dx \quad \beta) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{1}{\gamma} \cdot \int_{\alpha\gamma}^{\beta\gamma} f\left(\frac{x}{\gamma}\right) dx$$

2. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(cx) = f(c+x), \text{ με } c \in \mathbb{R} \text{ σταθερά. Να αποδείξετε ότι: } \int_{c\alpha}^{c\beta} f(x) dx = c \cdot \int_{c+\alpha}^{c+\beta} f(x) dx$$

3. Η συνάρτηση $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι: $2 \int_1^2 f(x^2) dx = \int_1^4 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$

4. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και έστω $\alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι: $\int_0^{\alpha} x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha^2} x f(x) dx$

**ΕΡΓΑΣΙΑ 9^η** (αντικατάσταση $x = \alpha/u$)

1. Αν $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{\alpha}} \frac{dx}{1+x^2} \quad \beta) \int_1^{\alpha} \frac{\ln x}{x+1} dx + \int_1^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\ln x}{x+1} dx = \frac{\ln^2 \alpha}{2} \quad \gamma) \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{x^2-1}{x^2} \cdot \sigma\upsilon\nu(\ln x) dx = 0$$

2. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \int_1^{\alpha} \frac{f(x)+2x}{x^2+1} dx + \int_1^{\frac{1}{\alpha}} \frac{f(\frac{1}{x})-2x}{x^2+1} dx = 2 \ln \alpha \quad \text{ii)} \alpha \int_1^{\alpha} \frac{1}{x^2} f\left(\frac{\alpha}{x}\right) dx = \int_1^{\alpha} f(x) dx$$

3. Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x > 0$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$x^2 f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = cx, \text{ όπου } c \in \mathbb{R} \text{ σταθερά. Για κάθε } \alpha > 0, \text{ να αποδείξετε ότι: } \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} f(x) dx = 2f(1) \ln \alpha$$

4. Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ικανοποιεί τη σχέση: $x^2 f(x) + 2f\left(\frac{2}{x}\right) = 2x$, για κάθε $x > 0$

$$\text{Να αποδείξετε ότι: } \int_1^2 f(x) dx = \ln 2$$

ΕΡΓΑΣΙΑ 10^η (αντικατάσταση $x = \alpha + \beta - u$)

1. Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{N}^*$ για την οποία ισχύει: $\int_0^1 x \cdot (1-x)^{\kappa} dx = \frac{1}{20}$

2. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x) + f(1-x) = 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: } \int_0^1 f(x) dx$$

3. Οι συναρτήσεις $f, g : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$, με $\alpha > 0$, είναι συνεχείς. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^{\alpha} f(x)g(\alpha-x) dx = \int_0^{\alpha} f(\alpha-x)g(x) dx$$

εφαρμογή

$$\alpha) \text{ Αν η συνάρτηση } f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma\upsilon\nu x) dx$$

$$\beta) \text{ Να αποδείξετε ότι: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2 + \eta\mu x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2 + \sigma\upsilon\nu x) dx$$

4. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και είναι: $f(\alpha-x) = xf'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Να αποδείξετε ότι: } \int_0^{\alpha} f(x) dx = \frac{\alpha f(\alpha)}{2}$$

5. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x) = f(\alpha + \beta - x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

A. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 2 \cdot \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x) dx \quad \beta) \int_{\alpha}^{\beta} xf(x) dx = \frac{\alpha+\beta}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = (\alpha+\beta) \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x) dx$$

$$\text{B. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: } \int_0^{\pi} \frac{x\eta\mu x}{4 - \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$$